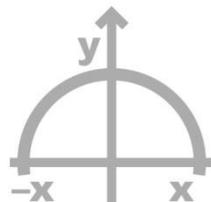


מתמטיקה למעבדה רפואי



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1. הפונקציה המשנית - תוכנות בסיסיות ופונקציות נפוצות (ללא ספר)	
2. הפונקציה המשנית - תוכנות מתקדמות.....	1.....
3. גבול של פונקציה	23.....
4. רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים	39.....
5. הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות	53.....
6. חישוב נגזרת של פונקציה.....	65.....
7. משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי	78.....
8. כלל לופיטל	89.....
9. חקירת פונקציה	96.....
10. חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות	125.....
11. מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה	129.....
12. בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)	134.....
13. משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב	154.....
14. משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנו', קושי ודרבו	160.....
15. טורי טילור - מקלורן	177.....
16. אינטגרלים מיידיים	192.....
17. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"	197.....
18. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים	199.....
19. אינטגרלים בשיטת ההצבה	203.....
20. אינטגרלים של פונקציות רצינליות	206.....
21. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות	211.....
22. האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו	222.....
23. שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת)	246.....

תוכן העניינים

24. שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת)	268
25. המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)	273
26. משוואות מסדר ראשון	281

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 1 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות
- (ללא ספר)
2. הפונקציה הליינרית
- (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית
- (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית
- (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית
- (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות
- (ללא ספר)
7. הערות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה
- (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות
- (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההיפוכות
- (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות
- (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה
- (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עוקום
- (ללא ספר)

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 2 - הפונקציה הממשית - תוכנות מתקדמות

תוכן העניינים

1	.תחום הגדרה של פונקציה.
3	.הרכבת פונקציות.
6	.הפונקציה ההיפוכת.
10	.פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.
15	.פונקציה מחזורית.
18	.פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית.
19	.תרגילים משלבים.

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

תשובות סופיות

. x כל **(1)**

$x \neq \pm 2$ **(2)**

. x כל **(3)**

$x \neq 0, 1, -1$ **(4)**

$x \neq 2, -1$ **(5)**

$x \geq 4$ **(6)**

$x \leq -2, x \geq 1$ **(7)**

. x כל **(8)**

$-1 < x < 1$ **(9)**

$x < -2, x > 1$ **(10)**

$x > 0, x \neq 1$ **(11)**

. x כל **(12)**

$x > 0, x \neq 1$ **(13)**

$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$ **(14)**

$x \neq \frac{\pi k}{4}$ **(15)**

. x כל **(16)**

$3 < x < 5$ **(17)**

$-2 < x < 0$ **(18)**

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות :
 $. h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות :

- | | | |
|----------------|-------------------|----------------|
| $f(g(x))$. ג. | $h(g(f(5)))$. ב. | $f(g(1))$. א. |
| $h(h(x))$. י. | $f(f(x))$. ה. | $h(f(x))$. ז. |

2) נתון : $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו $f(f(x))$ עבור $x=3$

3) נתון : $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x=8$

4) נתון : $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = e^2$

5) נתון : $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=2$

6) נתון : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו $f(g(x)), g(f(x))$

7) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצאו נוסחה עבור הרכבה $z(x) = g(f(x))$

(8) נתונות הפונקציות:

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$$

$$\cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור הרכבה $(f \circ g)(x)$.

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $n \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בודדות?

1. $n \leq -3$

2. $n \geq 1$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

(9) נתון $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאן את $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x)))))}_{n \text{ times}}$

תשובות סופיות

$x. 1 \quad x-8 . 2 \quad \frac{4}{x-4} . 3 \quad x^2-4 . 4 \quad 4 . 5 \quad -3 . 6 \quad \text{(1)}$

3 (2)

 $\frac{69}{13}$ (3)

-10 (4)

4 (5)

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 . 2 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 . 8 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חד"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חד"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חד"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$\text{. } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \quad (11) \text{ נתונה}$$

האם הפונקציה היא חד"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

12) עברו כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטעו והתמונה
וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

13) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} . \text{ א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] . \text{ ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : (1, \infty) \rightarrow (0, 1] . \text{ ג.}$$

14) תהיינה שתי פונקציות $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ ותהי $h : A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f ו- g חח"ע, אז h חח"ע.
- ב. אם f ו- g חח"ע, אז h על.
- ג. אם f ו- g על, אז h על.
- ד. אם f ו- g על, אז h חח"ע.
- ה. אם f חח"ע ו- g על, אז h חח"ע.
- ו. אם f חח"ע ו- g על, אז h על.
- ז. אם f על ו- g חח"ע, אז h חח"ע.
- ח. אם f על ו- g חח"ע, אז h על.

15) תהיינה שתי פונקציות $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ ותהי $h : A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h על. הוכיחו או הפריכו:

- א. f חח"ע.
- ב. f על.
- ג. g חח"ע.
- ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$
ותהי $h(x) = g(f(x))$ ההרכבה המוגדרת על ידי

נתון כי h חח"ע.
הוכיחו או הפריכו:

- א. g על.
- ב. f על.
- ג. g חח"ע.
- ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

. $y \neq 1, f^{-1}(x) = 3x + 1$ (1)

. $y \neq 1, f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ (2)

. $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}, y \neq 3$ (3)

. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}, y \geq -4$ (4)

(5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$

. $y \geq -\frac{1}{4}$ לא חח"ע. תמונה:

. $0 \leq y \leq 1$ לא חח"ע. תמונה:

(8) כן חח"ע. תמונה: $x > 0$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

(9) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -1.3$ או $y \geq 2.3$

(10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$

. $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ לא חח"ע. תמונה:

(12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: \mathbb{R} ; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $(-\infty, 0]$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $(-\infty, -4]$; לא על.

(13) א. תחום הגדרה וטווח: \mathbb{R} , תמונה: $(0, 1]$; לא על.

ב. תחום הגדרה \mathbb{R} , טווח ותמונה: $[0, 1]$; על.

ג. תחום הגדרה $(0, 1)$, טווח $[0, 0.5)$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי-זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות או זה זוגיות:

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = x^4 + x^{10} \quad (2)$$

$$y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = 2^x \quad (6)$$

$$y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8)$$

$$y = \ln x + x^2 \quad (7)$$

9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x), z(x) = f(x^2)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z, k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3)$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4), k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z, k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- \mathbb{R} ומקיים $|f(x)| < 1$.

נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- \mathbb{R} .

הוכיחו שהפונקציה $z(x) = g(x) \ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$

13) הוכיחו כי :

- סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

14) הוכיחו כי :

- סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

$$\text{נגיד } z = (f(x))^n \text{ כאשר } 1 > n \text{ טבעי.}$$

קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

$$f_{odd}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{even}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

נגיד :

- הוכיחו כי f_{odd} היא פונקציה אי-זוגית ו- f_{even} היא פונקציה זוגית.
- הוכיחו כי $f(x) = f_{odd}(x) + f_{even}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ציינו את הפונקציה $f(x) = x^2 + x + 1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0) = 0$.
- אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $0 < x \leq 0$ אז $f(0) = 0$.

18) הוכיחו את הטענות הבאות :

- הפונקציה $f(x) = \cos x$ היא זוגית.
- הפונקציה $f(x) = \sin x$ היא אי-זוגית.
- הפונקציה $f(x) = \tan x$ היא אי-זוגית.
- הפונקציה $f(x) = \cot x$ היא אי-זוגית.

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(a > 0) \quad (-a, a).$$

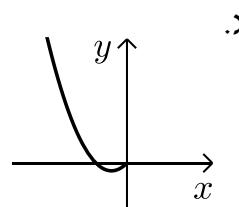
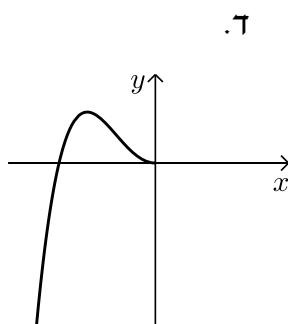
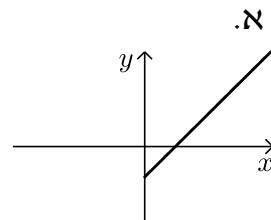
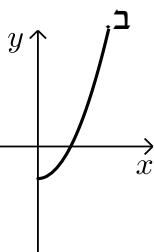
הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי-זוגיות :

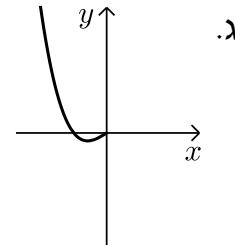
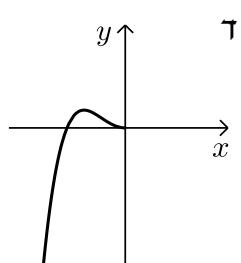
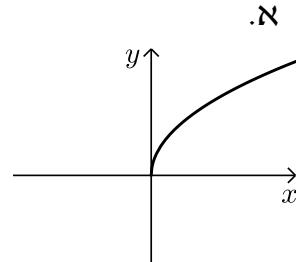
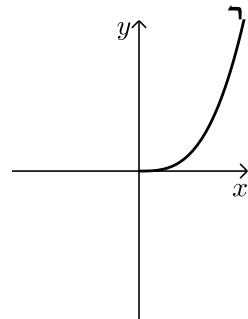
$$\text{א. } y = \arctan x$$

$$\text{ב. } y = \arcsin x$$

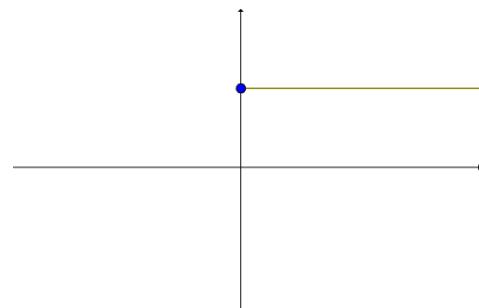
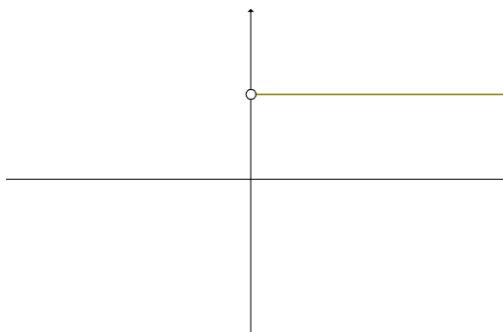
21) הפונקציות המסורטוטות להלן מוגדרות לכל x .
השלם את צירור הגרפ של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



22) הפונקציות המשורטוטות להלן מוגדרות לכל x .
 השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:



23) השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגיות : 1,4 ; 2,3,5,8 ; 6,7 . כללית :

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) טענה ב' .

11) k אי-זוגית, z זוגית.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) כאשר n זוגי – זוגית, ובאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

$$f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2+1}_{\text{even}}$$

16) א.+ב. שאלת הוכחה.

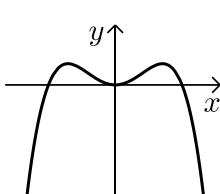
17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

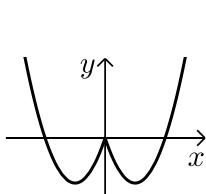
19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

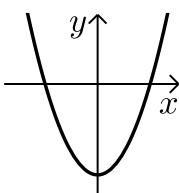
21) להלן הגרפים :



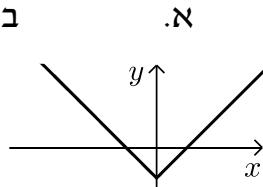
.7



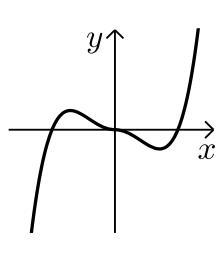
.8



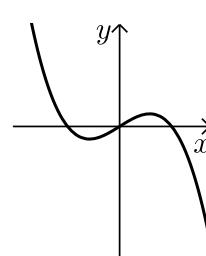
.9.



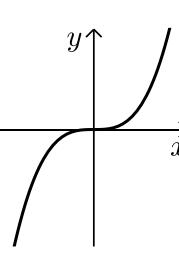
.10.



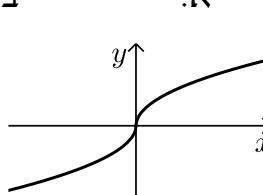
.11



.12



.13.



.14.

22) להלן הגרפים :

23) ראו בסרטון.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2)$$

$$y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4)$$

$$y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6)$$

$$y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8)$$

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10)$$

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12)$$

$$y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16)$$

$$y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18)$$

$$y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20)$$

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23)$$

$$y = x + \cos x \quad (22)$$

$$y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26)$$

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (25)$$

$$y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירה פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p ,

אז $\frac{p}{c}$ מחזורית בעלת מחזור $y = a + b \cdot f(cx + d)$.

(28) הוכיחו : אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם . $f(x+nT) = f(x)$

29) נתון כי f, g מוגדרות לכל x ובעלן מחזורי p_1, p_2 , בהתאם.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $(g \neq 0)$ $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ הן מחזוריות.

30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזורי הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציררו את גרף הפונקציה המחזورية והאי-זוגית (x, g) , המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f .

32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציררו את גרף הפונקציה המחזورية והזוגית (x, g) , המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב- $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g .

תשובות סופיות

$\frac{\pi}{4}$ (5)

π (4)

$\frac{\pi}{4}$ (3)

$\frac{\pi}{10}$ (2)

4π (1)

π (10)

$\frac{\pi}{2}$ (9)

π (8)

π (7)

$\frac{\pi}{2}$ (6)

2π (15)

2π (14)

2π (13)

π (12)

40π (11)

π (18)

π (17)

π (16)

19) הפונקציה היא למשהה $y = 1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

$\frac{\pi}{2}$ (20)

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

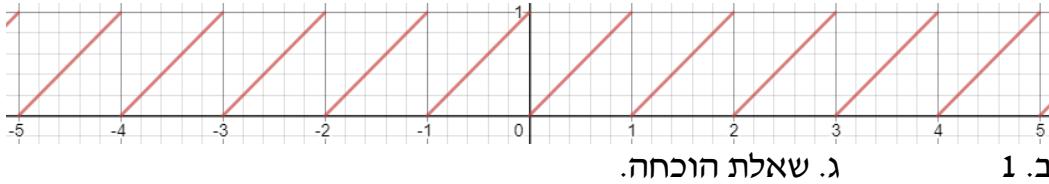
26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

30) א.

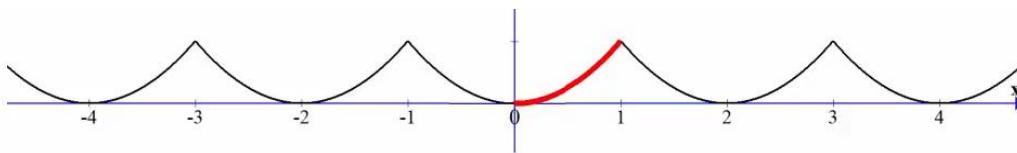


ג. שאלת הוכחה.

ב. 1

$$g(x) = x - k, \quad k - 1 \leq x \leq k + 1 \quad (31)$$

$$g(x) = (x - k)^2, \quad k - 1 \leq x \leq k + 1 \quad (32)$$



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת וشرطו את גраф הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

- . **a.** חשבו $f(1), f(4), f(-4), f(0), f(7)$.
- . **b.** שרטטו את גраф הפונקציה.
- . **c.** בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

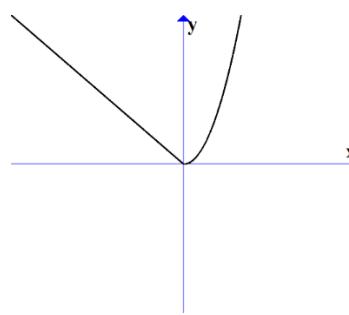
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

- . **a.** $f(1)=1, f(4)=16, f(-4)=4, f(0)=0, f(7)=\text{undefined}$.
- . **b.** כללית.



תרגילים משולבים

שאלות

$$\text{1) נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא :

- א. עולה.
- ב. יורדת.
- ג. אי-זוגית.
- ד. זוגית.
- ה. חסומה.
- ו. לא חסומה.
- ז. חח"ע.
- ח. על \mathbb{R} .

הערה : ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$\text{2) נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

- א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.
- ב. הפונקציה על \mathbb{R} .
- ג. הפונקציה אי-זוגית.
- ד. הפונקציה זוגית.
- ה. הפונקציה חח"ע.

הערה : ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, זוגית ומנוטוניות עולה ממש, ופונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אי-זוגית ומנוטוניות יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטוניות עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטוניות עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g : [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטוניות עולה ממש, ואילו g מונוטוניות יורדת חלש, אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

(5) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 0 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את h בקטע $[-2, 0]$.

ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2, 0]$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2, 0]$.

ד. קבעו האם $[0, 4] \rightarrow [-2, 0]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה $h(x) = f(g(x))$ היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לטעיפים א+ב :

אם $a < b \Leftarrow f(a) \geq f(b)$, אז הפונקציה f יורדת חלש.

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$

$g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו :

א. הפונקציה f עולה ממש וחו"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחו"ע.

9) מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על \mathbb{R} .

הערה : פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$

הערה : אין להשתמש בנגזרות.

11) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- 1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
- 2) אף טענה אינה נכוןה.
- 3) טענה ב' נכוןה.
- 4) טענה א' נכוןה.
- 5) א. $h(x) = x^2$
ב. הפונקציה חסומה בקטע.
- 6) א. הפונקציה חסומה.
ג. הפונקציה לא חח"ע.
- 7) א. הפונקציה $(x)^z$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.
- 8) שאלת הוכחה.
- 9) $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$; תחום הגדרתה: כל x .
- 10) ראו באתר.
- 11) א. $-1 \leq x \leq 2$
ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$
ג. שאלת הוכחה.
 $\frac{1}{2} < x \leq 2$ – עלייה, $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ – ירידת.

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 3 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

(ללא ספר)	1. הסבר כללי
23	2. הצבה
24	3. צמצום
25	4. הכפלה בצמוד
26	5. גבולות טריגונומטריים
28	6. פונקציה שואפת לאינסוף
29	7. איקס שואף לאינסוף
31	8. הגבול של אוילר
32	9. כלל הסנדוויץ
33	10. גבול של פונקציה מפוצלת
36	11. גבול לפי הגדרה

הצבר

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$

ד. 20 ג. 2

פתרונות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)

$n - 1$ (4)

6 (3)

$\frac{10}{8.5}$ (2)

$\frac{5}{6}$ (1)

$\frac{1}{5}$ (10)

$\frac{8}{17}$ (9)

27 (8)

3 (7)

32 (6)

הכפלה בצד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+x}}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

תשובות סופיות

$\frac{3}{8}$	(4)	$-\frac{1}{12}$	(3)	4	(2)	$\frac{1}{2}$	(1)
$-\frac{8}{3}$	(8)	$\frac{1}{3}$	(7)	$\frac{3}{4}$	(6)	$\frac{1}{6}$	(5)

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (9)$$

$$4 \quad (8)$$

$$\frac{1}{8} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} \quad (13)$$

$$-\sin a \quad (12)$$

$$\cos a \quad (11)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$1 \quad (17)$$

$$\frac{2}{\pi} \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\frac{4}{10} \quad (14)$$

זהויות טריגונומטריות שכדי להזכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{array} \right.$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

$\phi \quad (4)$

$-\infty \quad (3)$

$\phi \quad (2)$

$\phi \quad (1)$

$\phi \quad (8)$

$\infty \quad (7)$

$\infty \quad (6)$

$-\infty \quad (5)$

$-\infty \quad (12)$

$\phi \quad (11)$

$1 \quad (10)$

$0 \quad (9)$

$-\infty \quad (13)$

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + kx} - x \right) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \right) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2 \right) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x \right] \quad (29)$$

תשובות סופיות

$$-\infty \quad (4) \qquad 4 \quad (3) \qquad -\frac{\pi}{2} \quad (2) \qquad 0 \quad (1)$$

$$-1 \quad (8) \qquad 1 \quad (7) \qquad -5 \quad (6) \qquad 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{4} \quad (12) \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} \quad (11) \qquad 1.5 \quad (10) \qquad -3 \quad (9)$$

$$2 \quad (16) \qquad \frac{1}{9} \quad (15) \qquad 4 \quad (14) \qquad 0 \quad (13)$$

$$0 \quad (19) \qquad e^{\frac{1}{3}} \quad (18) \qquad \ln 3 \quad (17)$$

. $-\infty$: $b=0$, $a < 0$: $\exists N$. ∞ : $b=0$, $a > 0$ $\exists N$. $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$: $b \neq 0$ $\exists N$ (20)

$$-\frac{1}{2} \quad (24) \qquad \frac{1}{2} \quad (23) \qquad \frac{k}{2} \quad (22) \qquad 2.5 \quad (21)$$

$$\frac{5}{4} \quad (28) \qquad \frac{3^4}{2^{10}} \quad (27) \qquad \frac{a-b}{2} \quad (26) \qquad \frac{1}{2} \quad (25)$$

$$\ln(6e) \quad (29)$$

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin x\right)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9)$$

$$e^{30} \quad (8)$$

$$e^{-12} \quad (7)$$

$$e \quad (6)$$

כל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x-\ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתונה פונקציה } z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, לכל x .

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(z(x)) , \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) , \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) , \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

$$(12) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (5)$$

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$0 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$0 \quad (10)$$

$$1 \quad (9)$$

$$4 \quad (8)$$

$$\frac{3}{4} \quad (7)$$

$$0 \quad (6)$$

$$, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$$

$$, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$$

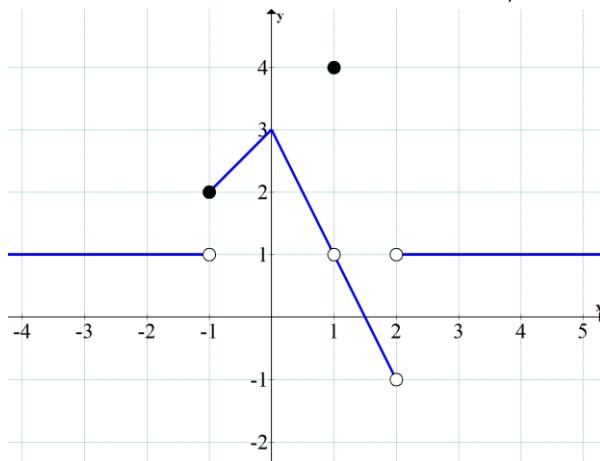
$$, \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$$

$$0 \quad (12)$$

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכחו שהם לא קיימים:

א. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ב. $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2)$ 2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2)$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f}$.ג.

2) נגידר פונקציה $f(x)$ כלהלן:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ x^2 - 1 & 0 < x < 2 \\ 1.5x - 6 & x \geq 2 \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases} : f(x) \quad (3)$$

- א. שרטטו את הפונקציה.
 ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$
 ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a}$ של הפונקציות הבאות:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (7)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} . \text{א} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} . \text{ב.}$$

תשובות סופיות

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \emptyset$, 3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \emptyset$. **(1)**

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$, 2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f(x)} = \frac{1}{3}$, 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f(x)} = \emptyset$.

6. ג. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$. ב. ראו בסרטון. **(2)**

-1. ג. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\emptyset \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$. ב. ראו בסרטון. **(3)**

4 **(4)**

ϕ **(5)**

ϕ **(6)**

1 **(7)**

-1 **(8)**

$\frac{1}{6}$ ב. א. אין גבול. **(9)**

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכחו:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \text{ חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2 - 1}$$

הוכחו על פי הגדרת הגבול את מקדים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3+x}{x^2 + 1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x}{2x + 1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו, כך שמעבר לכל $M > x$ מתקיים
 $f(x) < -4$.

$$(13) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו, כך שמעבר לכל $M > x$ מתקיים
 $f^2(x) > 16$.

$$(14) \text{ נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיוובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$15) \text{ נתון הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1$$

מצאו ערך של $x > M$, עבורו לכל $M > x$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו M , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$ $\forall x > M$).

$$16) \text{ נגידר את הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$17) \text{ בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

18) הוכחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0, \text{ אם ורק אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } L, \text{ אז: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$19) \text{ יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$20) \text{ יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$21) \text{ הוכחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של } 0 \text{ שבה } |f(x)| > 2.$$

. $f(x) > L$ הוכיחו שאם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה L

תשובות סופיות

$\pm\infty$ (7)

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר : GOOL.co.il

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 4 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

39	1. רציפות של פונקציה
45	2. משפט ערך הביניים
49	3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות
52	4. שיטת החצייה

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודות הטרפ" ¹ שלهن, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

7) עברו כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6:
רשמו עברו כל נקודת אי רציפות מסוימת.
בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסווג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיו רציפות לכל x ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת הכל לופיטל.

¹ נקודת טרפ היא הנקודה בה נסחתה הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15 : מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות תהיה רציפה בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4\frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a\frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתנים לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו :

- א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f + g$ רציפה? הוכיחו זאת.

$$18) \text{ תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

$$\text{ג. תהי } f(x) = x + \frac{1}{x}, \text{ ותהי } g(x) \text{ מוגדרת וחיובית לכל } x.$$

האם ההרכבה $g(f(x))$ רציפה לכל x ?

19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \text{ על ידי}$$

תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי

א. האם ניתן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

20) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$, לכל

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

21) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$, לכל

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

$$22) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f חסומה לכל x .

ב. הפונקציה f רציפה לכל x .

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

23) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x$ לכל x .
הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x = 0$.
- ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $\sin x \leq |f(x)| \leq x$ לכל x .
הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x .

ידוע כי עבור $x \neq \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$$

 מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x .

25) הפונקציות $f(x) - 2g(x)$ ו- $3g(x) + 2f(x)$ רציפות לכל x .

הוכיחו שהפונקציה $|f(x) - g(x)|$ רציפה לכל x .

26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)(1-f(x)) = 0$.

א. הוכיחו או הפריכו : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ או $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

ב. האם תשנה תשובהך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

27) תהי f מוגדרת לכל x .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. אם $(\sin x)$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

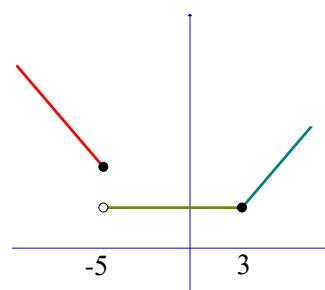
ב. אם $(\sin(f(x)))$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$, אז $f(x) = 4$ לכל x .

כיצד תשנה תשובהך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x ?

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
 (2) רציפה.
 (3) רציפה בנקודה $x = 1$, לא רציפה בנקודה $x = 2$.
 (4) רציפה בנקודות $x = 0, 1$, לא רציפה בנקודה $x = 2$.
 (5) לא רציפה.
 (6) לא רציפה.
 (7) 5. סЛИקה. 6. סЛИקה. 4. סוג ראשון.
 $k = 1$ (8)
 $k = 4$ (9)
 $k = \frac{2}{3}$ (10)
 $k = -1$ (11)
 $a = 0, b = \frac{1}{2}$ (12)
 $a = 2, b = 1$ או $a = 1, b = 2$ (13)
 $a = -2e^{-1}, b = e^{-1}$ (14)
 $a = \frac{e}{3}, b = -\frac{e}{3}$ (15)
 (16) שאלת הוכחה.
 (17) שאלת הוכחה.
 (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב- -5 יש אי רציפות מסווג ראשון.
 ג. לא.
 (19) א. לא. ב. כן.
 (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד :

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3)$$

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (4)$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות :

$$e^x - 5x = 0 \quad (5)$$

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (6)$$

(7) ענו על הטעיפים הבאים :

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x , המקיים : $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה $2x + f(x) = 1$ יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

$$\text{בו למשוואה } x^2 - 10 - \frac{1}{x} = 0 \text{ יש פתרון.}$$

$$\text{נגיד } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1} \quad (9)$$

א. חשבו את $f(0)$, $f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$?

יש פתרון בקטע $(0, 2)$?

10) תהיינה f, g פונקציות רציפה ב- $[a,b]$ המקיימות $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$.
 הוכיחו שקיים נקודה $a < c < b$ שבה $f(c) = g(c)$.

11) נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ שהוא חלקו בתחום הגדרתה.
 נניח ש- $f([a,b]) \subseteq [a,b]$.
 הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש- $f(c) = c$.
 נקודה c נקראת "נקודת שְׁבָתָה" של הפונקציה.

12) נתונה פונקציה רציפה $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$.
 הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0,1]$ כך ש- $f(c) = c^{1.5}$.

13) נתונה פונקציה רציפה $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = f(1)$.
 א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0,0.5]$ כך ש- $f(c) = f(c+0.5)$.
 ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c, d \in [0,1]$ כך ש- $f(c) = f(d)$.

14) נתונה פונקציה רציפה $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) < f(2) < f(1)$.
 הוכיחו כי קיימים $c_1, c_2 \in [0,2]$ כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$.

15) נתונה פונקציה רציפה $f : [0,8] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = f(8)$.
 הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0,8]$ כך ש-
 $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$.

16) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x + \sin x$ היא על \mathbb{R} .

17) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x \cdot \sin x$ היא על \mathbb{R} .

18) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזוריית עם מחזור 2π .
 הוכיחו שקיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

19) יהיו $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ קבועים המקיימים $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$.
 הוכיחו כי למשווה $\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

20) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה.

הוכיחו כי f עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ועל.

הוכיחו כי f לא רציפה ב- \mathbb{R} .

21) תהי $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

. $f(x) = \sin x$, שעבורם x , קיימים אינסוף ערכי x

22) יהיו P פולינום ממעלה זוגית, מהצורה $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

ונניח כי $a_0 < 0$.

הוכיחו כי ל- P ישם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

23) יהיו f, g פונקציות רציפות המקיים :

. $0 < k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$

. $f(x) = g(x)$ לפחות אחד למשווה.

24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) , ותהיינה x_1, \dots, x_n (כאשר $1 > n$) נקודות כלשהן ב- (a, b) .

הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a, b) , כך ש-

$$\cdot f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) .

האם לכל $c \in (a, b)$, ניתן למצוא נקודות x_1, \dots, x_n , שונות זו מזו,

$$\text{כך ש- } ? f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

הוכיחו זאת.

25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a, b) .

. נניח כי : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$

הראו כי תמונה הקטע (a, b) היא \mathbb{R} .

26) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, המקיים $f(0) = -1$, $f(1) = 4$.

$$\text{תהי } S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$$

א. הוכיחו ש- S לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמןו α .

ג. הוכיחו כי $\alpha \in (0,1)$.

ד. הוכיחו כי $f(\alpha) = 0$.

27) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, כך ש-

$$f(x_1) = f(x_2), \text{ כך ש- } a < x_1 < x_2 < b$$

28) תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0 \leq r \leq 1$.

הוכיחו שיש c בקטע, עבורו מתקיים $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$.

29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשווה $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$ יש פתרון.

ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(4) > 2f(2)$, $f(0) > 0$.

הוכיחו שקיים c כך ש- $f(2c) = 2f(c)$.

ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

$$\text{הוכיחו שקיים } a \text{ כך ש- } f(a) = \frac{1}{a}$$

30) פונקציה f מוגדרת לכל x .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיזוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

תשובות סופיות

(8) $[0.1,1]$

$$f(0) = -1, f(2) = 5 \quad \text{ב. לא.}$$

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תכונות נוספות של פונקציות רציפות

שאלות

1) קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכון, והוכחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא :

- א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
- ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
- ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
- ד. חסומה, אבל לא רציפה.
- ה. רציפה, אבל לא חסומה.
- ו. הופכת חיובית לשילנית מבלי לעبور דרך האפס.
- ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
- ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
- ט. חסומה, שתמונתה אינה קטע.
- י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
- יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה,
שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f , היא קטע.

2) תהי $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f פונקציה רציפה, המקיימת $f(x) > 0$, לכל $x \in [a,b]$.
הוכחו שקיים $\alpha > 0$, כך ש- $f(x) \geq \alpha$, לכל $x \in [a,b]$.

3) תהי $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f פונקציה רציפה, ונניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים.
הוכחו ש- f חסומה.

4) יהיו $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f, g פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות x_1, x_2 ,
המקיימות $x_1 < x_2$, קיימת נקודה x_3 בין $x_1 < x_3 < x_2$, שעבורה $f(x_3) = g(x_3)$.
הוכחו כי $f(x) = g(x)$, לכל x .

5) תהי $(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$: f פונקציה על.
הוכחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

6) תהי $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x) = f(x^2)$, לכל $x \in \mathbb{R}$.
הוכחו ש- f פונקציה קבועה.

7) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, שמיימת (a,b), כלומר קיימים קבועים ממשיים K ולכל $x, y \in \mathbb{R}$ הוכח כי $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

8) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) , ונניח שקיימים קבועים ממשיים K ו- x_1, x_2 בקטע (a, b) , מתקיים תנאי לפ楔'ז: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$.
הוכח כי f רציפה בקטע (a, b) .

* נסו להוכיח בשתי דרכי שונות.

9) הוכח שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.
בארכיות:

הוכח שאם f פולינום ממעלת זוגית, אז קיימת נקודת $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0) \geq f(x)$, לכל $x \in \mathbb{R}$.

- 10) בסעיפים א-ב הוכחו:
 א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.
 ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.
 ג. תהי $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. הוכח שהפונקציה לא רציפה בכל נקודת \mathbb{R} .
 הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דרייכלה.

- 11) הוכח או הפריכו:
 א. אם $f(x)$ רציפה בנקודת c , אז $|f(x)|$ רציפה בנקודת c .
 ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודת c , אז $f(x)$ רציפה בנקודת c .

בשאלות 12-13 הוכחו:

12) אם f רציפה ב- x_0 , אז קיימת סביבה של x_0 , בה f חסומה.

13) אם f רציפה ב- x_0 , ואם $f(x_0) > 0$, אז קיימת סביבה של x_0 , שבה $f(x) > 0$.

14) יהיו $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) \neq g(a)$ רציפות המקיים עבור a ממשי מסוים.

הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x) \neq g(x)$.

הערה

תרגילים זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:

תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ממשית $f(a) \neq 0$, עבור a ממשי מסוים.

הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x) \neq 0$.

פשוט לKHנו $g(x) = 0$.

טענה זו נשתמש בשאלת האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

15) הוכיחו כי אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה a , אז הפונקציה $g(x) =$

$$\begin{cases} -c & f(x) < -c \\ f(x) & |f(x)| \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

המודדרת על ידי (כאשר c מספר חיובי כלשהו).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ e^{-x} - e^{-1} & x < 1 \end{cases}$$

בדקו האם הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

תשובות סופיות

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ -\ln(x + e^{-1}) & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

- 1)** נתונה המשוואה $0 = 2 - x^3 - 2x^2 - x + 2$. בעזרת שיטת החצייה בקטע $[2,3]$,
מצאו שורש מקובל של המשוואה על ידי 6 איטרציות.
מהו קירוב השורש?
- 2)** נתונה המשוואה: $x^3 - x - 2 = 0$.
- א. מצאו קטע שארכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש
בדיווק של 0.001?
ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיווק של 0.001.

הערה: ברטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוספת.

תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll} \text{1.} & 0.07 & \\ \text{2.} & \begin{array}{ll} \text{א.} & [1,2] \\ \text{ב.} & 10 \\ \text{ג.} & x=1.520 \end{array} & \end{array}$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 5 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

53	1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה
60	2. נגזרות חד צדדיות

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימוש לב

בפרק זה יש לדעת גזירות פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למד זו את כדי לעبور קודם לפסק הבא, ללמידה את הנושא, ורק אחר כך להזורכאן.

שאלות*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \qquad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \qquad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \qquad f(x) = \ln x \quad (5) \qquad f(x) = e^x \quad (4)$$

7) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$

8) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$

9) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x) = x \cdot z(x)$ כאשר $z(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4$

10) נתונה הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$. האם קיים משיק בנקודה זו?

11) נתונה הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציות בנקודה $x=0$?

* פרק זה חל איסור להשתמש בכלל לפיטול.

(20) הוכיחו או הפריכו :

- אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $h \cdot g = f$ אינה גזירה ב- x_0 .
- אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $h \cdot g = f$ אינה גזירה ב- x_0 .

(21) הוכיחו או הפריכו :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'(x)$, אז f גזירה.
- אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(22) הוכיחו או הפריכו :

- אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.
- אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.

(23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x = 4$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x-4)}{x-4} = 0$.
הוכיחו ש- f גזירה ב- $x = 4$, וחשבו את $f'(4)$.

(24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x = 0$ המקיים $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
א. הוכיחו כי $f(0) = 0$.
ב. הוכיחו כי f' גזירה ב- $x = 0$ ו- $f'(0) = 0$.

(25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f'(0) = k$ ו- $f(0) = 0$.

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$$

(26) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: פונקציה גזירה בנקודה x_0 .

- אם $f(x_0) \neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- x_0 .
- אם $f(x_0) = 0$, הראו שיתכן כי $|f|$ גזירה ב- x_0 וייתכן שלא.

(32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכחו שפונקציית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכחו שהפונקציה $f(x) = (x-1)^2 D(x)$ גזירה רק בנקודה $x=1$.

(33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x .

הוכחו שהפונקציה גזירה ב-0.

(34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin^2 x$ לכל x .

הוכחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

(35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0 .

א. הוכחו כי $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $(x_0)' f$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $(x_0)' f$ את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 3h)}{h}$

(36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0 .

א. הוכחו כי $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$

ב. תנו דוגמה של פונקציה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $(x_0)'' f$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לפיטל'.

(37) נתון כי $f(x) = (x-a)f(x)$, ונגידר פונקציה חדשה $z(x) = f(x)$.
הוכחו או הפריכו :

א. הפונקציה z גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $(x)' z$ רציפה ב- $a=x$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = 4 \cos 4x \quad (3)$$

$$f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = 2x + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6)$$

4 (9)

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (5)$$

2 (8)

$$f'(x) = e^x \quad (4)$$

!44 (7)

(10) א. רציפה לכל x . ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיימים משיק א נכי בנקודה.

א. $n > 2$ ב. $n > 1$ (11)א. $n > 1$ ב. $n > 1$ (12)

$$e^{\frac{1}{4}} \quad (13)$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה. $f' = 0$ (17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקאים: $f'(0) = 0$ (18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=-1$, ומתקאים: $f'(-1) = 0$

$$x = \frac{\pi}{2}n \quad \text{ב.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 5\sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5\sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \quad \text{א. (19)}$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) שאלת הוכחה.

(31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

-5 $f'(x_0)$. א. $f(x) = |x|$ ב. (35) א. שאלת הוכחה.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ב. (36) א. שאלת הוכחה.

(37) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בוואידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכי שוניות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$ על מנת להציג שתי שיטות אלה.
בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות **2-9** בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.
בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7)$$

$$f(x) = 2 + 4|x - 1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

10) בדקו האם הפונקציה משאלת **5** גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11)$$

א. עבור أيיה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$?

ב. עבור ערך ה- a שקיבלה בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$.
האם קיימים מושיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לפיטול.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4(x > 1), \quad f'(x) = -4(x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x(x \geq 0), \quad f'(x) = 4x(x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודת $x=0$.

ב. לא גזירה. לא קיים משיק. $a=1$. **א.**

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

ב. $q=0, p=4$. **א.** $q=0$.

(14) -10

(15) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x]\cos(\pi x)\pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x]\sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר www.GooL.co.il

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב. } x \neq 1$$

(24) א. רציפה לכל x וגזירה לכל $x \neq 1$.

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 6 - חישוב נזירת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
65	2. תרגול בכללי הגזירה
69	3. תרגילים נוספים לפי סוגים
72	4. גזירה סתומה
74	5. כלל השרשרת
77	6. גזירה לוגריתמית

תרגול בכלי הגירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 35-27 מצאו רק את הנגזרת הראשונה) :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x+10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^x \quad (15) \quad f(x) = e^x \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייה.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4} \right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2\tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{\left(1 - (2x+3)^2\right)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזוו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^2 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^7 \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3 \quad \text{א.}$$

$$f(x) = x^{-1} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^{-3} \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = x^1 \quad \text{כ.}$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} \quad \text{ט.}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ז.}$$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזוו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = 3x^7 \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 2x^3 \quad \text{א.}$$

$$f(x) = 3x^{-2} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = 8x^1 \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^6}{7} \quad \text{כ.}$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3} \quad \text{ט.}$$

$$f(x) = 6x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{ז.}$$

הנגזרת של קבוע

(3) גזוו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{7}{8} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 12 \quad \text{א.}$$

הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזוו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{א.}$$

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

5) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = 3(x - x^2)^2 \quad \text{א.}$$

$$f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ז.}$$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

6) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ט.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{6}{x+5} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ז.}$$

הנגזרת של מכפלה

7) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{א.}$$

$$f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ג.}$$

הנגזרת של מנת

8) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} \quad \text{ז.}$$

הנגזרת של שורש

9) גזוו את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = 4\sqrt{x+1} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 \sqrt{x+3} \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \quad \text{ז.}$$

תשובות סופיות

(1)

$$f'(x) = 2x \quad .\text{א}$$

$$f'(x) = 7x^6 \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = 3x^{-4} \quad .\text{ה}$$

$$f'(x) = 1 \quad .\text{ט}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad .\text{ח}$$

(2)

$$f'(x) = 2x^3 \quad .\text{א}$$

$$f'(x) = 21x^6 \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = 6x^2 \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{x^3} \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = 8 \quad .\text{ה}$$

$$f'(x) = \frac{6x^5}{7} \quad .\text{ט}$$

$$f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} \quad .\text{ח}$$

0. ב

0. ג (3)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad .\text{ח}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad .\text{ט}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad .\text{א}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad .\text{ח}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = 10x-14 \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \quad .\text{ה}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad .\text{ח}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad .\text{ט}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad .\text{ו}$$

$$f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad .\text{א}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad .\text{ב}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad .\text{ג}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad .\text{ד}$$

$$f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad .\text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad .\text{ח}$$

גירה סטומה

שאלות

(1) גזו את הפונקציה הסטומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.

(2) גזו את הפונקציה הסטומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.

(3) גזו את הפונקציה הסטומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.

(4) נתונה הפונקציה הסטומה הבאה
חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.

(5) נתונה הפונקציה הסטומה הבאה
חשבו את y' בנקודה $y=0$.

(6) גזו את הפונקציה הסטומה $x^y - xy = 10$.

(7) גזו את הפונקציה הסטומה $x^y - y^x = 1$.

(8) נתונה פונקציה סטומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$
מצאו את ערך y^n בנקודה $y=1$.

(9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2 + e^y = x$
א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.
ב. חשבו את y' בנקודה $x=1$.

(10) נתון כי המשווה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$
מגדירה את $y(x)$ כפונקציה סטומה של x .
נתון כי $h(y)$ גירה ברציפות ויורדת.
הוכחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{\frac{4}{-x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \text{ ב.} \quad (9)$$

(10) שאלת הוכחה.

כל השרשרת

שאלות

1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיים $f'(4) = 10$

ונדר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$

חשבו את $g'(2)$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה $f(x)$. נדר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואות $z'(x)$.

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיים $f(1) = 2, f'(1) = e$

ונדר פונקציה חדשה $z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$

חשבו את $z'(e)$.

3) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$

ידעו כי $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו $g'(100)$.

4) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

ידעו כי $f(1) = 1, f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$.

5) נתונה הפונקציה $\cdot g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

חשבו $g'(1)$.

6) נתונה הפונקציה $\cdot g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$

חשבו $g'(1)$.

7) נתונה הפונקציה $\cdot g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$.

8) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית
והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $(x)'''$
היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $\cdot g(x) = (f(x))^4$
קבעו האם הפונקציה $(x)'g$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

תשובות סופיות

40 (1)

$$z'(e) = 3 \frac{3}{4} . \text{ ב.} \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 . \text{ א.}$$

 $\frac{17}{80}$ (3)

36 (4)

 $\frac{8}{9}$ (5)

44 (6)

-2 (7)

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

גירה לוגריתמית

שאלות

גירו את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 7 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הlienairi

תוכן העניינים

1. המשיק	78
2. בעיות משיקים	80
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק	82
4. הנורמל	86
5. זווית שבין שתי עקומות	87
6. נוסחת הקירובlienairi - דיפרנציאל שלם	88

המשך

שאלות

1) מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודה $(2, 2)$.

ב. $x = -2$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$.

2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע a .

3) הישר $3y - 2x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודה $(1, 15)$ הוא 3.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה

? $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$

לכל ערך k כזו מצאו את נקודת ההשקה.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x = 1$ ו- $x = 3$.

ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א', עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(8) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}.$$

מצאו את הנקודות על גраф הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(9) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x^3 - 2x^2 + 5.$$

מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגראף הפונקציה יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(10) \text{ פונקציה } f(x) \text{ גזירה ברציפות ב- } 0 \text{ ומקיימת } f(0) = 0.$$

ידעו שבראשית הזרים הזווית בין המשיק לגראף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא 30° .

$$\text{חשבו את הגבול} . \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$(11) \text{ מצאו את הזווית שיווצר המשיק לגראף הפונקציה } f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } 17 \text{ ב. } 4$$

$$(2) a = 2$$

$$(3) (1,3)$$

$$(4) a = 2, b = -1$$

$$(5) a = 2, b = -2$$

$$(6) \text{ לערך } x = \frac{1}{3}, k = 6, \text{ בנקודת } x=1; \text{ לערך } \frac{158}{27} \text{ בנקודת } x=0.$$

$$(7) \text{ א. ראו באתר. ב. } \alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$$

$$(8) x = 5, x = -1$$

$$(9) x = 1, x = \frac{1}{3}$$

$$(10) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(11) \alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$$

בעיות משיקים

שאלות

1) הימש $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

2) הימש $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

3) הימש $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודת $x=0$. מצאו את a ו- c .

4) הימש $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

5) מצאו את המשוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודת $x=e$.

6) מצאו את נקודת ההשקה, ואת המשוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

$$(2, -3), \quad y = x^2 - 2x + 1 \quad (6)$$

$$(-3, 1), \quad y = \sqrt{x} \quad (7)$$

8) מצאו את המשוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

9) הפונקציות $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ ו- $y = \frac{1}{x}$ משיקות זו לזו. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

- 10)** נתון כי f גזירה לכל x .
- הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = x^2 f(3x - 2)$ גזירה לכל x .
 - הישר $11x + 11 = 2y$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x = -1$.
מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x = -5$.

תשובות סופיות

1) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

2) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

3) נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

4) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

6) $y = 6x - 15$, $(4,9)$; $y = -2x + 1$, $(0,1)$

7) המשיק $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$, $(9,3)$

8) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$

9) $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.

10) א. שאלת הוכחה.
השיפוע הוא 2.

בעיות משיקים עם נסחתת המשיק

שאלות

1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$, בנקודה $x = -1$.

2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$, שיפועו 2.

3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$, בנקודה $x = 0$.

4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$, בנקודה $x_1 = 1$.

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y = 2$, הוא -4 .

מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר x .

7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$, שיפועו -2 .

8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$, בנקודה $x_1 = 2$.

9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1, 6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b , ואת משוואת המשיק.

10) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x = 2$.
מצאו את משוואת המשיק.

11) מצאו את המשוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$, בנקודת $x = 0$.

12) מצאו את המשוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

13) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודת שבת $x = e^2$. מצאו את המשוואת המשיק.

14) מצאו את המשוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$, בנקודת $x = 1$.

15) הגרפים של $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - \ln x$ נחתכים בנקודת A, בربיע הראשון. מצאו את המשוואת המשיק והוכחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

16) מצאו את המשוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודת $(3,4)$.

17) מצאו את המשוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1,1)$.

18) מצאו את המשוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

19) מצאו את המשוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2y = xy^2$, דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

20) מצאו את המשוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

- 21) נתונה הפונקציה הסטומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
- א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
- ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (18)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (19)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (20)$$

. $y = x - 1$: ב. בראשית הצירים : $x = -y$, המשווהה השניה : $(0,0), (1,0)$. נ. (21)

הנורמל

שאלות

- 1) מצאו את משווהת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3,2)$.
- 2) מצאו את משווהת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו- $(2,4)$.
- 3) משווהת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסויימת, היא $4y + x = 6$. מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

$$y = -2x + 8 \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \quad (2)$$

$$(2,1) \quad (3)$$

זווית שבין שתי עקומות

שאלות

- 1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y = g(x) = \frac{1}{x}$ ו- $y = f(x) = x^2$.
- 2) מצאו את הזווית בין המרגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולת $x^2 - y^2 = 2$.
- 3) הוכיחו שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

תשובות סופיות

- (1) 71.57°
- (2) 71.56°
- (3) שאלת הוכחה.

נוסחת הקירוב הליינרי – דיפרנציאל שלם

שאלות

- 1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הליינרי, את הגודלים הבאים :
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$
- 2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הליינרי, את הגודלים הבאים :
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \approx 2.25, \sqrt{8} \approx 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \approx 1, \sqrt[3]{9} \approx 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

מתמטיקה למעבדה רפואיית

פרק 8 - כלל לפיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואין סוף חלקי אין סוף	89
2. גבול מהצורה אפס כפול אין סוף	92
3. גבול מהצורה אין סוף פחות אין סוף	93
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אין סוף	94
5. מקרים בהם כלל לפיטל נכשל	95

גבול מהצורה אפס חלקי אפס או אינסוף חלקי אינסוף

שאלות

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ ו } \frac{0}{0}$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רצionarioליים) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רצionarioליים) :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x-2} - 1} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות מושולבות) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$	(5)	4	(4)	$n-1$	(3)	$\frac{20}{17}$	(2)	$\frac{5}{6}$	(1)
$\ln \frac{a}{b}$	(10)	1	(9)	$-\frac{3}{2}$	(8)	$\frac{5}{6}$	(7)	$\frac{3}{2}$	(6)
1	(15)	2	(14)	$-\frac{1}{2}$	(13)	$\frac{1}{6}$	(12)	$\frac{1}{2}$	(11)
$\frac{1}{2}$	(20)	$\frac{1}{6}$	(19)	$\frac{a}{b}$	(18)	$\frac{a}{b}$	(17)	1	(16)
$-\frac{1}{2}$	(25)	$-\frac{1}{3}$	(24)	$\frac{1}{3}$	(23)	$\frac{1}{8}$	(22)	$\frac{1}{2}$	(21)
$\frac{1}{2}$	(30)	$\frac{2}{3}$	(29)	1	(28)	1	(27)	$-\frac{3}{4}$	(26)
0	(35)	∞	(34)	0	(33)	∞	(32)	$\frac{1}{2}$	(31)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $0 \cdot \infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x-3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

0 (5)

0 (4)

0 (3)

0 (2)

∞ (1)

$\frac{5}{2}$ (9)

6 (8)

0 (7)

0 (6)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

תשובות סופיות

0 (1)

$\frac{1}{2}$ (2)

$\ln \frac{3}{5}$ (3)

$\frac{1}{2}$ (4)

$-\frac{1}{2}$ (5)

$\frac{1}{3}$ (6)

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, \quad (a > 0) \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x} \quad (13)$$

תשובות סופיות

e^2	(5)	1	(4)	1	(3)	1	(2)	e	(1)
1 (10)		$e^{-1/2}$	(9)	$e^{1/3}$	(8)	e^3	(7)	1	(6)
		e	(14)		1 (13)	e	(12)	1	(11)

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\frac{\infty}{\infty}$.
 הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו יישם.
 לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 9 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

96	1. מושגי יסוד
97	2. חקירת פולינום
98	3. חקירת פונקציה רצינולית
102	4. חקירת פונקציה מעירכית
105	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
109	6. חקירת פונקציה עם שורשים
110	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
113	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית
117	9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות
119	10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות
124	11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:

- תחומי הגדרה ורציפות.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- זוגיות ואי-זוגיות.
- אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעת.
- תחומי עלייה וירידה.
- נקודות קיצון.
- תחומי קמירות וקעירות.
- נקודות פיתול.
- שרטוט סקיצה של גраф הפונקציה.

2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.

3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, חלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.

4. בחלק מהפתרונות אזכיר שאלה שאין צורך לעبور על כל שלבי החקירה. שימוש לב זהה.

5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניית להוריד [כאן](#). בעורתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבזוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחומי הגדרה : כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0, 9.

נקודות קיצון : מינימום : (9, 108), מקסימום :

תחום עלייה : $x < 3$ or $x > 9$, ירידה : $3 < x < 9$.

תחום קמירות : $x < 6$, קעירות : $x > 6$.

נקודות פיתול : (6, 54).

(2) תחומי הגדרה : כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0, 2.

נקודות קיצון : מינימום : $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$

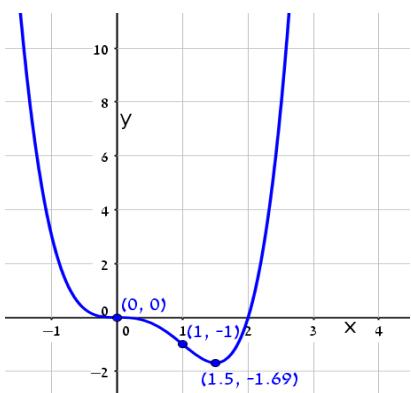
תחום עלייה : $x < 1.5$, ירידה : $x > 1.5$.

תחום קמירות : $0 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות :

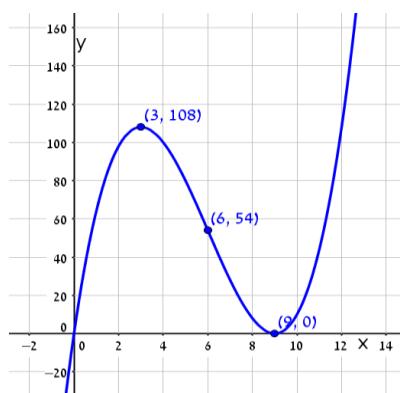
נקודות פיתול : (0, 0), (1, -1).

גרפים

(2)



(1)



חקירת פונקציה רצינלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלת 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפטור משווהה ממעלה שלישית.
2. בשאלת 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפטור משווהות בדרכן נומריות. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלת 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסביר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $x - 1 = y$.

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $0 \neq x$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.

אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$. נקודת פיתול: (2, 0.25).

תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.

תחום קמירות: $0 < x < 3$, קוירות: $x < 0$ or $x > 3$.

(2) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $-1 \neq x$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.

אסימפטוטה אנכית: הישר $x = -1$, משופעת ואופקית: הישר $y = 2$.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$. נקודת פיתול: (0, 0).

תחום עלייה: $-1 < x < 0$, ירידה: $x < -1$ or $x > 0$.

תחום קמירות: $x > \frac{1}{2}$, קוירות: $-1 < x < -1$ or $x < -1$.

(3) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $2 \neq x$. אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.

אסימפטוטה אנכית: הישרים $x = -2$, $x = 2$, משופעת: הישר $x = 0$.

אופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$, מקסימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$.

תחום עלייה: $-\sqrt{12} < x \neq \pm 2 < \sqrt{12}$, ירידה: $x < -\sqrt{12}$ or $x > \sqrt{12}$.

נקודת פיתול: (0, 0).

תחום קמירות: $x < -2$ or $0 < x < 2$, קוירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$.

(4) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $-1 \neq x$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.

אסימפטוטה אנכית: הישר $x = -1$, משופעת: הישר $y = x - 2$.

אופקית: אין, כי הפונקציה רצינולית, שבה מעלה המונה גדולה מעלה המכנה.

נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$.

תחום עלייה: $-3 < x < -1$, ירידה: $x > -1$ or $x < -3$.

נקודת פיתול: (0, 0).

תחום קמירות: $x < -1$ or $-1 < x < 0$, קוירות: $x > 0$.

5) תחום הגדרה ורכיפות : לכל $1 \neq x$. זוגיות : לא זוגית ולא אי-זוגית (כליית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .

אסימפטוטה אנכית : הישר $x = 1$, משופעת ואופקית : הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון : אין ; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

$$\text{נקודות פיתול: } \left(-3, \frac{1}{8}\right), \quad (-1, 0)$$

תחום קמירות : $x < -3$ or $-1 < x < 1$ & $-3 < x < -1$, קעירות : לכל $x \neq 2$, $y \neq 1$.

6) תחום הגדרה ורכיפות : לכל $5 \neq x$, $y \neq 2$. זוגיות : כליית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .

אסימפטוטה אנכית : הישרים $x = 2$, $x = 5$, משופעת ואופקית : הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון : מקסימום : $(2.78, -3.88)$, מינימום : $(0.36, -0.11)$.

תחום עלייה : $2 < x < 2.78$ or $0.36 < x < 5$.

ירידה : $x > 5$ or $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$.

תחום קמירות : $x < -1$ or $2 < x < 5$ or $-1 < x < 2$, קעירות : $2 < x < 5$.

7) תחום הגדרה ורכיפות : לכל $2 \neq x$. זוגיות : כליית.

$$\text{נקודות חיתוך עם ציר ה-}x : x = 1, \quad x = 3, \quad \text{עם ציר ה-}y : y = -\frac{3}{4}$$

אסימפטוטה אנכית : הישרים $x = 2$, $x = -2$, משופעת ואופקית : הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון : אין ; כי למשווה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.

תחום עלייה : הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

נקודות פיתול : $(0.85, -0.09)$.

תחום קמירות : $x > 2$ or $-2 < x < 0.85$, קעירות : $-2 < x < 2$ or $0.85 < x < 2$.

8) תחום הגדרה ורכיפות : לכל $-1 \neq x$.

$$\text{נקודות חיתוך עם ציר ה-}y : y = 0, \quad \text{עם ציר ה-}x : x = -1$$

אסימפטוטה אופקית : אין, אנכית : הישר $x = -1$.

נקודות קיצון : מקסימום : $(-2, -4)$, מינימום : $(0, 0)$.

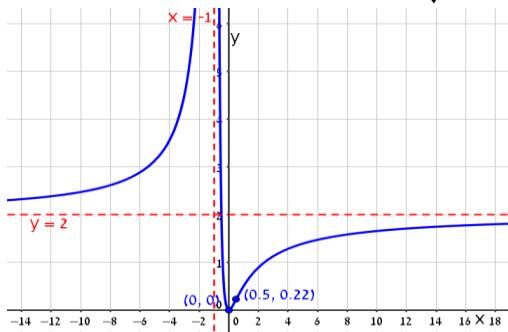
תחום עלייה : $-2 < x < -1$ or $x > 1$ or $0 < x < 1$ or $x < -2$, ירידה : $x > 1$ or $-1 < x < 0$.

נקודות פיתול : אין.

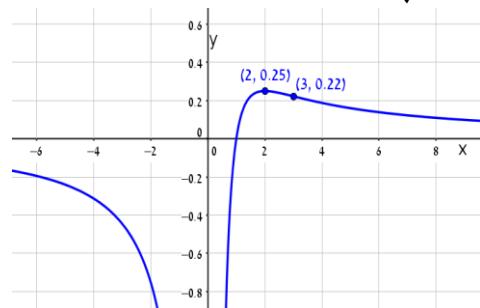
תחום קמירות : $x > 1$ or $-1 < x < 1$.

גרפים

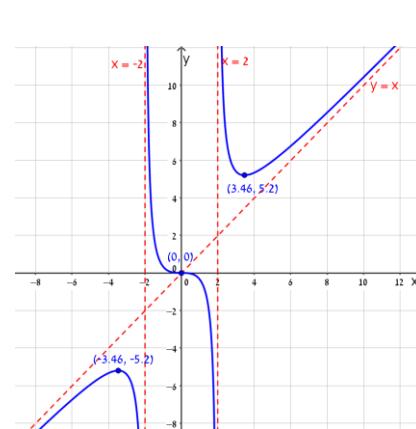
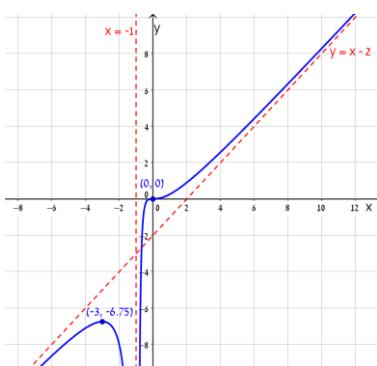
(2)



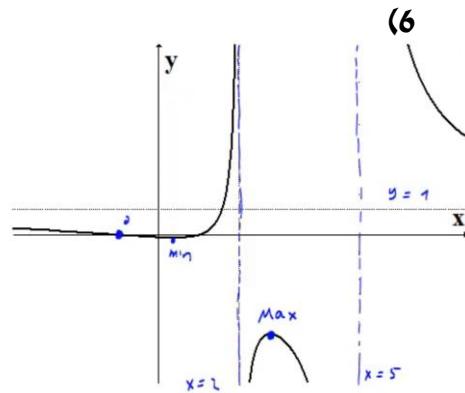
(1)



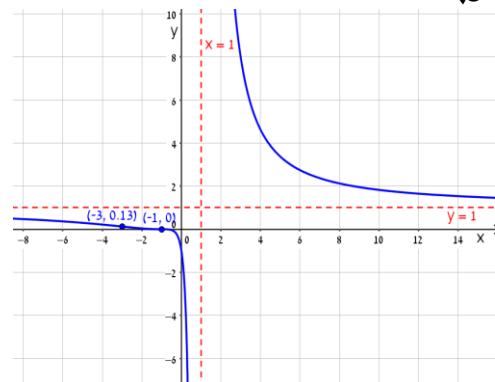
(4)



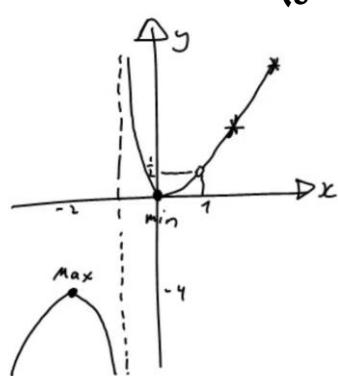
(3)



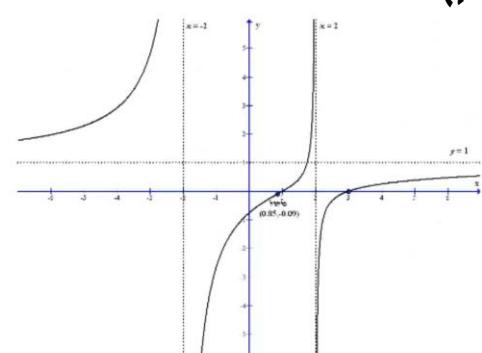
(5)



(8)



(7)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

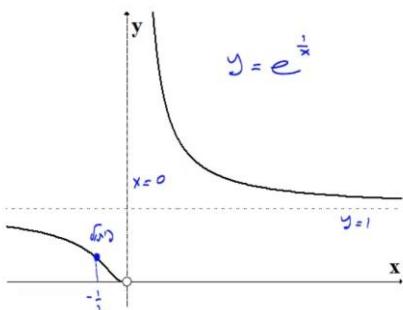
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

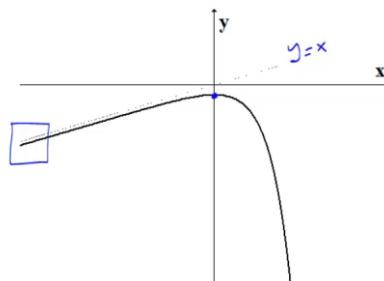
- 1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבת בסרטון).
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $x = y$ ב- $-\infty$ בלבד.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
 נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
- 2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $0 \neq x$.
 זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
 תחום קמירות: $x < -0.5$ or $-0.5 < x < 0$, תחום קעירות: $x < 0$ or $-0.5 < x < 0$.
- 3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $0 \neq x$.
 זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת: הישר $y = x + 3$ ב- $\pm\infty$.
 אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $\left(2, 4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < 2$ or $-1 < x < 0$, ירידה: $x > 2$ or $x < -1$.
 נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
 תחום קמירות: $x < 0$ or $-0.4 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
- 4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 זוגיות: אי-זוגית (симטרית ביחס לראשית).
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y = 0$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: מקסימום: מינימום: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
 תחום עלייה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$, ירידה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.
 נקודת פיתול: $(0, 0)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$.
 תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$, תחום קעירות:
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

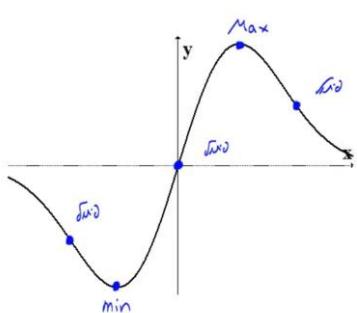
(2)



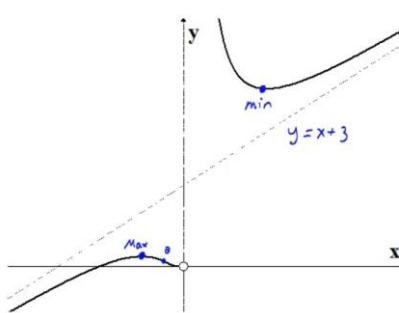
(1)



(4)



(3)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפטור משוואות בדרכן נומריית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודות פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $0 < x < e^{1.5}$, קעירות: $x > e^{1.5}$.
 (2) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום $\left(e^2, \frac{2}{e^2}\right)$.
 תחום עלייה: $x > e^2$, ירידה: $x < e^2$.
 נקודות פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$.
 (3) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודות פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
 (4) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x < e^{-1}$, ירידה: $x > e^{-1}$.
 נקודות פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

5) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.

אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.

תחום עלייה: $x < e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.

נקודות פיתול: $(1, -3)$. תחום קmirות: $1 < x < 1$, קעירות: $0 < x < 1$.

6) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.

אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}}, -4\right)$.

תחום עלייה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $x > e^{\frac{1}{2}}$.

נקודות פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קmirות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.

7) תחום הגדרה ורכיפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.

אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $(e, 2), (e^{-1}, 2)$.

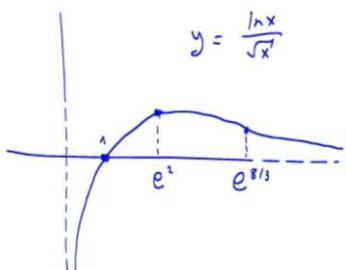
תחום עלייה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$, ירידה: $x > e$ or $e^{-1} < x < 1$.

נקודות פיתול: $(5.15, 3.06)$.

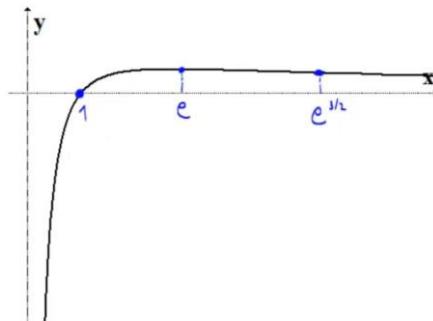
תחום קmirות: $x > 5.15$, קעירות: $0 < x < 1$ or $1 < x < 5.15$.

גרפים

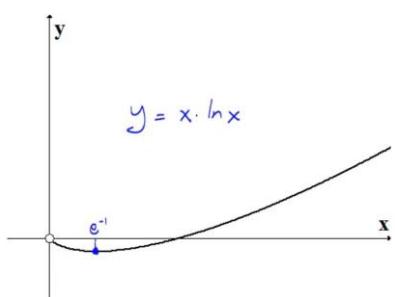
(2)



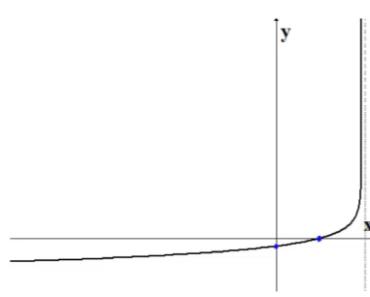
(1)



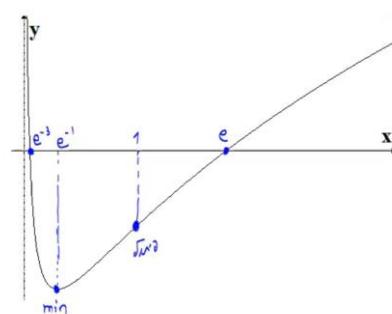
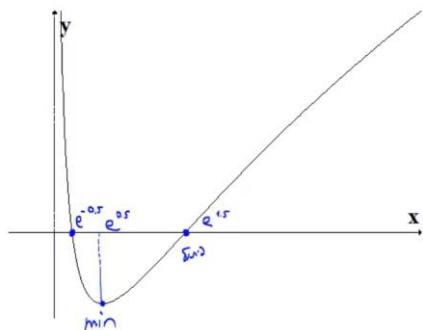
(4)



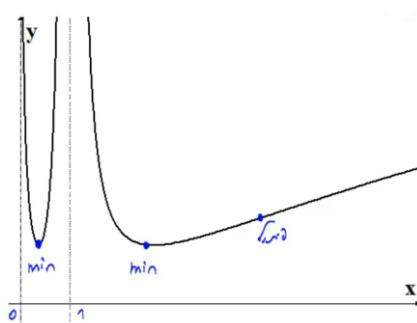
(3)



(6)



(5)



(7)

חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

- 1) חקרו את הפונקציה הבאה חקירה מלאה :
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

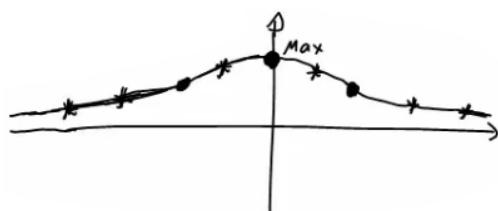
תשובה

- 1) תחום הגדרה ורכיפות : לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית : אין, אופקית : $y = 0$.
 נקודות קיצון : מקסימום : $(0, 1)$. תחום עלייה : $x < 0$, ירידת : $x > 0$.

נקודות פיתול:
 $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \right)$

תחום קמירות : $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות : $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

גרף :



חקירת פונקציה לא גירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1 \right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

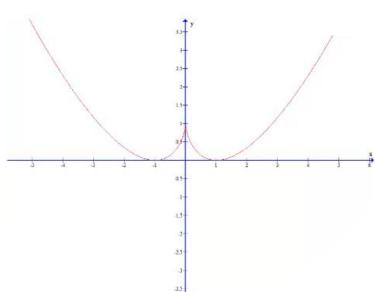
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

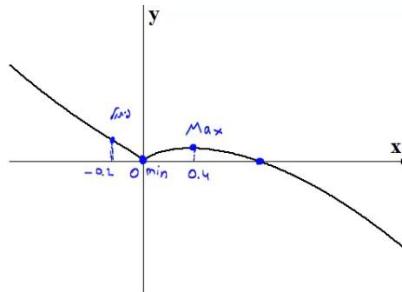
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0 או 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(0, 0\right)$, מינימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$.
 תחום עלייה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$, ירידה: $0 < x < \frac{2}{5}$
 נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
 תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.2 < x < 0$, קעירות: $-0.2 < x < 0$,
 תחום הגדרה ורציפות: לכל x . (2)
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1, עם ציר ה- x : -1 או 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
 תחום עלייה: $x < -1$ or $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$
 נקודות פיתול: אין.
 תחום קמירות: קמורה לכל x . (3)
 תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1, עם ציר ה- x : ± 1 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
 תחום עלייה: $x < -1$ or $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $0 < x < 1$ or $x < -1$
 נקודות פיתול: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
 תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x < -1$ or $x > 1$. (4)
 תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5, עם ציר ה- x : 3.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $-\infty$, $y = -1$ ב- $-\infty$.
 נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
 תחום עלייה: $x < 2$ or $2 < x < 3$, ירידה: $x > 3$.
 נקודות פיתול: $(3, 0)$.
 תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x < 2$ or $x > 3$.

גרפים

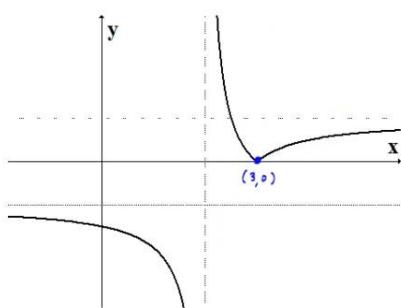
(2)



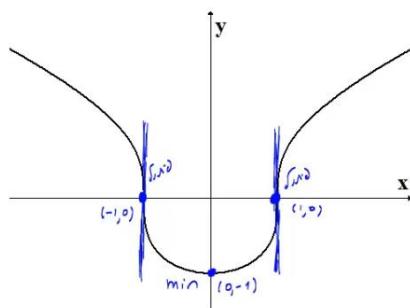
(1)



(4)



(3)



חקירה פונקציה טריגונומטרית

שאלות

1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גраф הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גраф הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גраф הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקוירוט כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גраф הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גраф הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גраф הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גраф הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי קוירוט כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גраф הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[\pi, 0]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גраф הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גраф הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גраф הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גраф הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$ בתחום הנתון?

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0, \pi]$.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

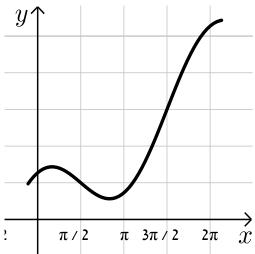
$$[0, 2\pi], \quad f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (8)$$

$$[0, \pi], \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (9)$$

תשובות סופיותא. $0 < x < 2\pi$ (1)

ב. $\min(0, 2), \max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right), \min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$ קצה, $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה.

ג. תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{6}$ או $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$.



ד. $(0, 2)$. ה. אין.

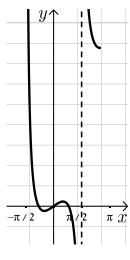
ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$

קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

א. $x \neq \frac{\pi}{2}$ וגם $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ (2)

ב. $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right), \max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי ירידה: $x \neq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

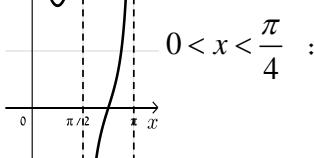


ה. ארכית: $(0, 0)$ ו. $x = \frac{\pi}{2}$ (0, 0).

ז. קעירות כלפי מעלה: $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$ או $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$

קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

א. π . ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ (3)



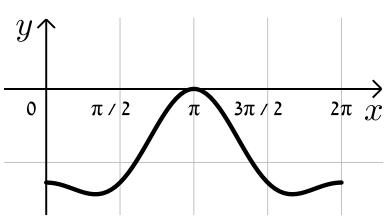
ג. תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

ה. ארכית: $x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi$ ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$

א. $(\pi, 0), (0, -2)$ (4)

ב. $\left(\frac{1}{3}\pi, -2.25\right), \max(2\pi, -2), \max(0, -2), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(\pi, 0)$

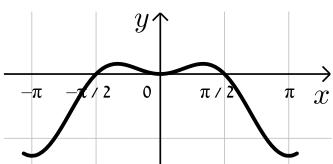
ג. עולה: $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ גראן.



א. נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $x = 0, \pi, 2\pi$

ב. נקודות קיצון: $(0,0), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), (1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

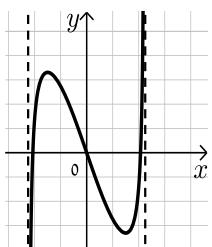


א. נקודות קיצון: $\min(\pi, -2) : (0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

ב. נקודות קיצון: $\min(0,0), \max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$

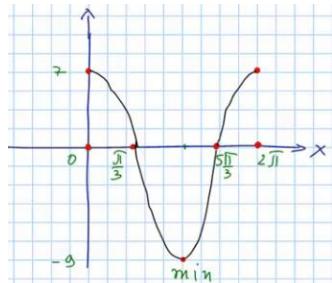
. $x = \pm 0.25\pi$ ב. $(0,0), (\pm 0.23\pi, 0)$

ג. $\min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$



8) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $x = 0, \pi, 2\pi$

נקודות קיצון: מינימום: $(\pi, -9), (\pi, -2)$, מקסימום: $(0, 7), (2\pi, 7)$



נקודות פיתול: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

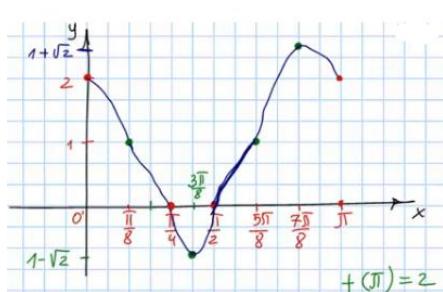
קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

תחום עלייה: $x < 2$ or $2 < x < 3$ ירידה: $x > 3$

9) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $x = 0, \pi/4, \pi/2$

נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2}\right), \left(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2}\right)$

תחום עלייה: $0 < x < \frac{3\pi}{8}$ or $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$ ירידה: $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$



נקודות פיתול: $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{8}, 1\right)$

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$

קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{8}$ or $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

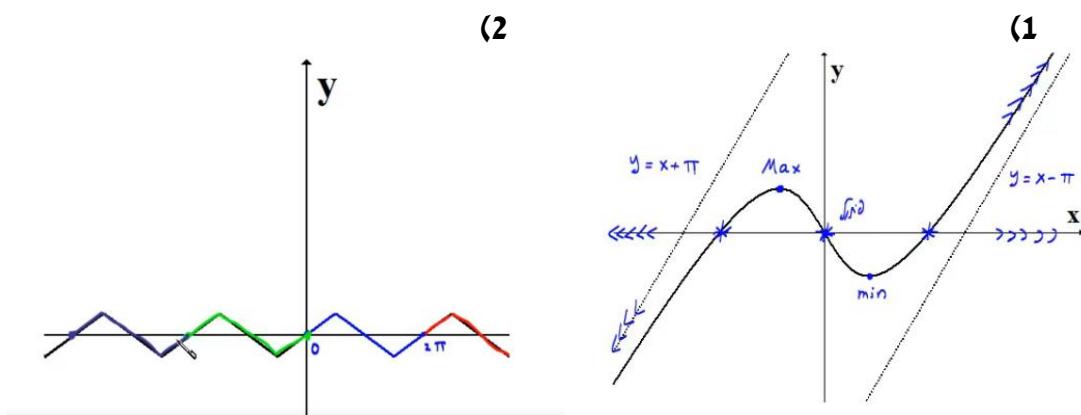
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורכיפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0.
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, 0.575)$, מינימום: $(1, -0.575)$.
 תחום עלייה: $-1 < x < 1$, ירידה: $x > 1$ or $x < -1$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$.
 תחום קמירות: $x < 0$, קעירות: $x > 0$.
- (2) תחום הגדרה ורכיפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 מחזוריות: כן, מהഴור 2π .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : $x = 0, \pi, 2\pi$.
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
 תחום עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, ירידה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ or $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
 נקודות פיתול: אין.

גרפים



חקירת פונקציה – שאלות כלליות

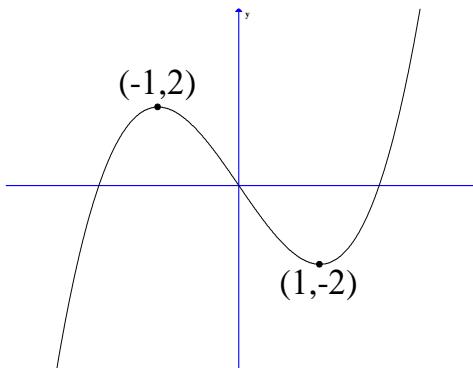
שאלות

- 1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון. מצאו את הקבוע a .
- 2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון. מצאו את הקבועים a, b .
- 3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול. מצאו את הקבוע a .
- 4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול. מצאו את הקבועים a, b .
- 5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=3$ הוא 33. מצאו את a .
- 6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12. מצאו את b .
- 7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a .
- 8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a ואת b .

9) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$

ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$



10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

13) עבור أيיה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיקות פתרון אחד?

14) עבור أيיה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיקות שני פתרונות?

15) עבור أيיה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיקות שלושה פתרונות?

16) האם קיימים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

18) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2) = 4$.

נגידר פונקציה חדשה $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכחו כי z יורדת.

19) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיים $f(1) = 2$, $f'(1) = e$

$$\text{נדיר פונקציה חדשה } z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

א. האם z עולה או יורדת בנקודת $x = e$?

ב. נתון בנוסף כי f שלילית וולגה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

20) נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

$$\text{נדיר פונקציה חדשה } z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהබאים בהכרח נכון?

א. z עולה לכל x .

ב. z יורדת לכל x .

ג. z עולה לכל $x > 0$.

ד. z יורדת לכל $x > 0$.

21) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיים $f'(1) = e$

$$\text{נדיר פונקציה חדשה : } g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

א. חשבו את $(e)'$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודת $x = e$.

$$\text{חסבו את הגבול} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

22) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודות החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $0 = x$.

נדיר $g(x) = (f(x))^2$. איזו מבחן הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז $-g$ יש נקודות מינימום.

ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז $-g$ יש נקודות מינימום.

ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז $-g$ אין נקודות קיצון.

23) הפונקציה $f''(x) = a \cdot f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיים $f(x)$ לכל x כאשר $a < 0$.

איו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- בתחום בו $f(x)$ שלילית, $f'(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו תחום.
- אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(0, n)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $n = x$ הוא המקסימלי באותו תחום.
- אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

16) לא

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$\text{ב. שאלת הוכחה.} \quad z'(0.5) = -16. \quad \text{א.}$$

19) א. עולה.
ב. יורדת.

20) ז

$$\text{ב. שאלת הוכחה.} \quad g. \quad 2e+1. \quad \text{א.} \quad 2e+1. \quad (21)$$

g (22)

ז (23)

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם :

$$(-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (1)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3} \right), \quad x < 2 \sin x \quad (2)$$

$$(x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$(x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x \quad (4)$$

5) נתון כי f רציפה לכל $x \geq 0$, $f'(x) > 0$, וכן $f(0) = 0$.

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 10 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

125	1. נגזרת הפונקציה החזקה.
126	2. נגזרת מסדר גבוה
127	3. נוסחת לייבניץ
128	4. גזירה פרמטרית.

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

נגזרת מסדר גובה

שאלות

חשבו את הנגזרת ה- n , של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x+a} \quad (1)$$

$$y = \frac{2x+3}{x^2 - 3x + 2} \quad (2)$$

$$y = \frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} \quad (3)$$

$$y = \frac{x^4}{x^2 - 1} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left(-5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left((x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right), \quad y'' = 2 + \left((x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right) \quad (4)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n \cdot n! \left((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right), \quad (n > 2)$$

נוסחת ליבניץ

שאלות

חשבו את הנגזרת העשירה, $y^{(10)}$, של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 e^x \quad (1)$$

$$y = x^3 \sin 5x \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

גירה פרמטרית

שאלה

(1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\text{הנתונה בצורה פרמטרית} \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$$

תשובה

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 11 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה	129
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי	132
3. הוכחת אי שוווניות	133

מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

בשאלות 1-7 מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחוםים הרשומים לידן (אם יש כאלה) :

$$(-1 \leq x \leq 3) f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) f(x) = x^{\frac{2}{3}}(20-x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right] f(x) = \begin{cases} 4x-2 & x < 1 \\ (x-2)(x-3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

8) נתונה הפונקציה $f(x) = x^x$ בתחום $x > 0$.

- א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.
- ב. דמיינו שהפונקציה הפיכה בקטע $(0, 0.5)$. הוכיחו שדמי טועה.

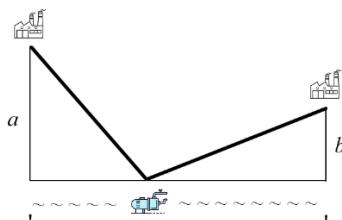
9) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x) = x^2 + |\ln x|$

10) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, ב- \mathbb{R} .
הערה: אין להשתמש/ngzorot בתרגיל זה.

11) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

ב- \mathbb{R} וב- $[1, 3]$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.



12) לחברת מי עדן יש שני מפעלים.

האחד מרוחק a ק"מ מהמעיון.

השני מרוחק b ק"מ מהמעיון.

המרחק האופקי בין המפעלים הוא c ק"מ.

החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבת במעיון בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.

מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבת שהחברה תצטרך?

הראו שהאורך המינימלי מתקיים כאשר הזווית בין כל צינור למעיין שווה.

13) גליל חסום בצד.

הוכחו, מבין כל הגליילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שగובה פי

$\sqrt{2}$ מרדיויס הבסיס שלו.

תשובות סופיות

- (1) מינימום מוחלט, (3,9) מקסימום מוחלט.
- (2) מינימום מוחלט, (5,0) מינימום מוחלט, (2,3) מקסימום מוחלט.
- (3) מינימום מוחלט, (20,0) מינימום מוחלט, (8,48) מקסימום מוחלט.
- (4) מינימום מוחלט, (1,2) מקסימום מוחלט.
- (5) מינימום מוחלט, (-5,17) מקסימום מוחלט.
- (6) מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.
- (8) ב. שאלת הוכחה.
א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.
- (9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1 + \ln 2)$.
- (10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.
- (11) ב- \mathbb{R} , (1,0), (3,0) : מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
ב- $[1,3]$, (2,1) : מינימום מוחלט, (1,0), (3,0) : מקסימום מוחלט.
- (12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.
- (13) שאלת הוכחה.

שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

שאלות

- (1) תהי f פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) .
נניח שקיים נקודה $c \in (a,b)$, כך ש- $f'(c) < 0$.
הוכחו כי קיימת נקודה $d \in (a,b)$, כך ש- $f'(d) = 0$.

- (2) פונקציה f גזירה בעמיה בקטע $[a,b]$.
айдוע כי $f(x) - f'(x) = f''(x)$ לכל x , וכן $f(a) = f(b) = 0$.
הוכחו כי $f(x) = 0$ לכל x בקטע.

- (3) הפונקציה f גזירה בעמיה ומקיימת $f''(x) = 0$ עבור פונקציה g מסוימת.
הוכחו: אם הפונקציה f מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.

- (4) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בעמיה בקטע (a,b) , כך ש- $f''(x) < 0$ בקטע זה.
נתון כי $f(a) = f(b)$.
א. הוכחו כי $f(x) > 0$ בקטע (a,b) .
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מוריידים את דרישת הרציפות? הוכחו או הפריכו.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.

הוכחת אי-שוויונים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו את אי-השוויונים הבאים, לגבי התחום שבסטוררים משמאלי:

$$x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0), \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (2)$$

$$(x \leq 1), \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (3)$$

(4) יהיו a ו- b מספרים חיוביים.

הוכיחו שא-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1) a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad (2) b(1-a) > \frac{1}{4}$$

. $[a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$; $(a,b) \Leftrightarrow a < x < b$; $[a,b) \Leftrightarrow a \leq x < b$

לפתרונות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 12 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון	134
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים	135
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור	136
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים	140
5. בעיות קיצון בהנדסת המרחב	144
6. בעיות קיצון עם תשובה נתונה	146
7. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון	147
8. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני	152

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגודלים בשאלת $C-x$.
- נבטא את שאר הגודלים בשאלת באמצעות x .
- נבנה פונקציה שmbטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נזוזר את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערך ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "y" (או טבלה).
- לנוכח את התשובה לשאלת המקורית.

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

- 1)** נתונים שלושה מספרים שסכוםם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- 2)** מצאו את המספר החיבובי, שאם נוסיף לו את המספר ההפוך לו,
הסכום המתתקבל יהיה מינימלי.
- 3)** נתונים שלושה מספרים שסכוםם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקומות
שווה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- 4)** x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$.
א. הבינו את y באמצעות x .
ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y ,
כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הניל?

תשובות סופיות

(1) 8,8,8

(2) 1

ג. מקרה א'.

ב. 8,12,16

א. 12,12,12

(3) $M = 22500$

ב. $x = 30, y = 5$

א. $y = 10 - \frac{x}{6}$

בעיות קיצון בהנדסת המישור

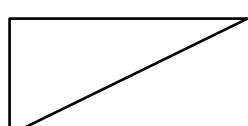
שאלות

1) מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקףם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדל ביותר.

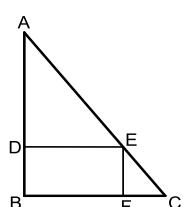
2) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקף a , מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדל ביותר.

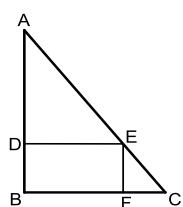
ב. הוכחו : מבין כל המשולשים שווים השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדל ביותר הוא משולש שווה צלעות.



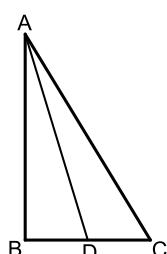
3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



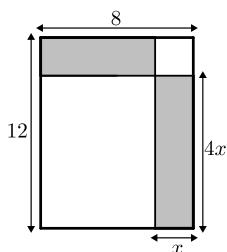
4) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$),
הנקודה E נמצאת על היתר AC ,
כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן.
נתון : $20 \text{ ס"מ} = AB$, $16 \text{ ס"מ} = BC$.
מצאו את שטחו של המלבן בעל
השטח הגדל ביותר.



5) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$),
הנקודה E נמצאת על היתר AC ,
כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן.
נתון : $BC = b$, $AB = a$, $AC = c$.
מצאו את שטחו של המלבן בעל
השטח הגדל ביותר.



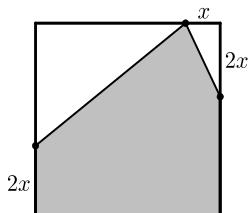
6) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$),
 AD הוא תיכון לניצב BC .
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



7) נתון מלבן שאורך צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.

מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$

על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקבוקווים. מצאו את x , עבورو סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



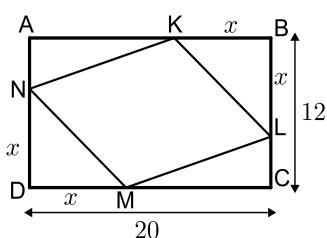
8) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.

מקצים קטע שאורך x על הצלע העליונה,

ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות, כמתואר באיור, כך שנוצר המרומש המקבוקו.

מצאו מה צריך להיות ערכו של x , עבورو שטח המרומש יהיה מקסימלי.

9) הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש :



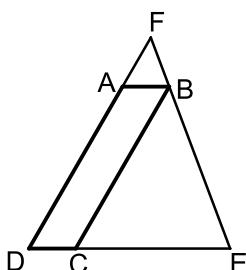
$BK = BL = DM = DN = x$.

צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

א. הבינו באמצעות x את סכום שטחי המשולשים $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצאו מה צריך להיות x , כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?



10) המרובע ABCD הוא מקבילית.

מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF, הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.

ידעו כי מידות המקבילית הן :

$2 \text{ ס"מ} = AB, 8 \text{ ס"מ} = AD$.

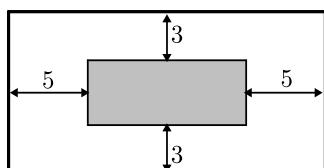
נסמן את אורך הצלע DE ב- x .

א. הבינו באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את x , עבورو סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?

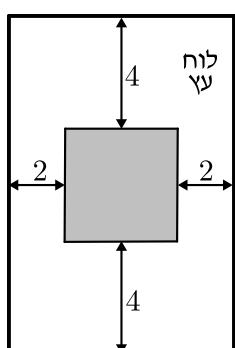
11) חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'. תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי الكرتون בעלי שטח מינימלי, כך שיישארו רוחחים של 3 ס"מ מקצתה הkarton העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדיה (ראה איור).



יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלוקה אונוניי, ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות ב מידות שונות, אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר". מה הן המדידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מדידות הקרטון עבור הגלואה המסוימת?



12) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עצ, ששטחו הכלול הוא 242 סמ"ר, כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ, ובקצות העלון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור). כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

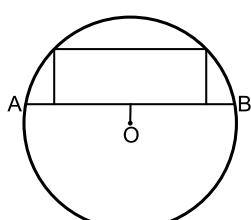
א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה תהיה השטח המקסימלי עבור המדידות שאלינה בחרה?

13) במעגל שמרכזו O ורדיוסו $\sqrt{10}$ ס"מ העבירו

מיינר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.

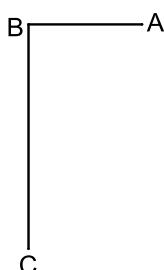
בקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט. מצאו את היקפו של המלבן בעל היקף הגדול ביותר.



14) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a .

בקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט. מצאו את היקפו של המלבן בעל היקף הגדול ביותר.



15) שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדריכם :

האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.

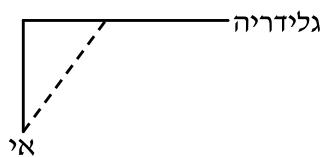
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש

ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.

עבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביןיהם מינימלי?

מצאו גם את המרחק המינימלי.



16) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצא גלאי. האדם שוכן במחירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במחירות של 10 קמ"ש. לאי זה מרחק מהגלאי עליו לשחות, כדי להגיע לגלאי בזמן הקצר ביותר?



17) אדם מתכוון לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביבה למרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ש"ל למטר, ומהירות מעקה מצדיה המרפסת הוא 40 ש"ל למטר. מה צרכים להיות מדדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

תשובות סופיות

$$(1) 4\sqrt{3} \text{ ס"מ.}$$

$$(2) \text{א. } 2.5 \text{ ס"מ.}$$

$$\text{ג. } 6\sqrt{2} \approx 8.48. \text{ ס"מ.}$$

$$(3) \text{א. } 6 \text{ ס"מ ו- } 6 \text{ ס"מ} \quad \text{ב. } 18 \text{ סמ"ר.} \quad (4) . S = 80 \text{ סמ"ר}$$

$$(5) \frac{ab}{4} \text{ ייחידות שטח.}$$

$$(6) 4 \text{ ס"מ, } 16 \text{ ס"מ.}$$

$$(7) x = 2.75$$

$$(8) x = 6$$

$$\text{ג. } 128 \text{ סמ"ר.} \quad S =$$

$$\text{ב. } x = 8$$

$$(9) \text{א. } 2x^2 - 32x + 240.$$

$$\text{ג. } L = 18 \quad x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2} \quad \text{ב. } DF = \frac{8x}{x-2}. \quad (10)$$

$$\text{ב. } 12 \text{ ס"מ על } 20 \text{ ס"מ.}$$

$$(11) \text{א. } 6 \text{ ס"מ על } 10 \text{ ס"מ.}$$

$$\text{ב. } S = 98.$$

$$(12) \text{א. } 11 \text{ ס"מ על } 22 \text{ ס"מ.}$$

$$(13) 92 \text{ ס"מ.}$$

$$(14) 2\sqrt{5}R - 2a \text{ ייחידות אורך.}$$

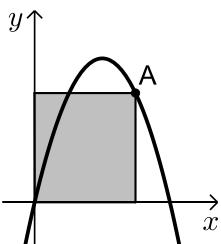
$$(15) 4 \text{ שעות, המרחק: } \sqrt{80} \text{ ק"מ.}$$

$$(16) 2\frac{1}{3} \text{ ק"מ.}$$

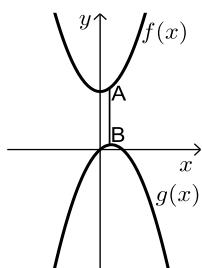
$$(17) 4 \cdot 6$$

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

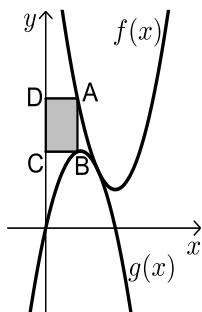
שאלות



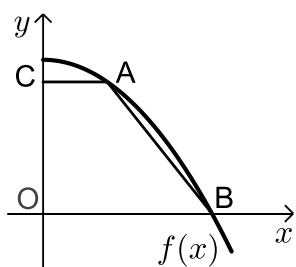
- 1)** נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. נקודת A של הפונקציה בربיע הראשון הורידו אנכים לציר השיעורים כך שנוצר מלבן מתאים לשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



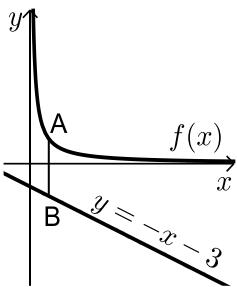
- 2)** נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$, כמפורט באירור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, בהתאם, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



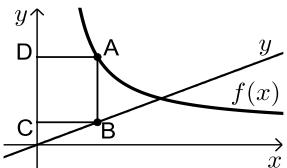
- 3)** באירור שלහן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גוף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גוף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y , כך שנוצר מלבן (מסומן באירור). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
- א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
- ב. מצאו את ערכו של t , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
- ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



- 4)** נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$. על גוף הפונקציה בربיע הראשון מסומנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x , ו-O ראשית הצירים.
- א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
- ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

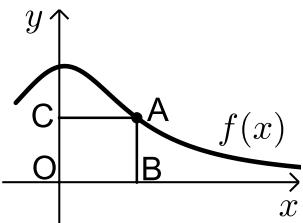


- 5) נתונה הפונקציה: $y = -x - 3$, ונתון הישר: $f(x) = \frac{4}{x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.

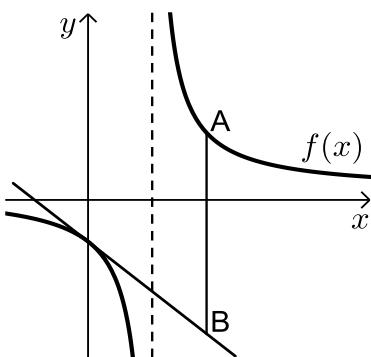


- 6) באIOR שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y = \frac{9x}{25}$. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y , כך שנוצר המלבן ABCD. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
- הביעו באמצעות t את היקף המלבן ABCD.
 - מצאו את t , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.
 - מה יהיה היקף במקרה זה?

- 7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ונתון הישר $y = 2x$. בין הישר והפונקציה בריבוע הראשון חסמו מלבן. מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

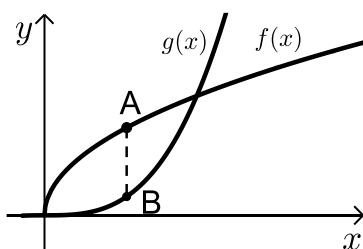


- 8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום: $x \geq 0$. מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנו מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באIOR.
- מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.
 - מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?

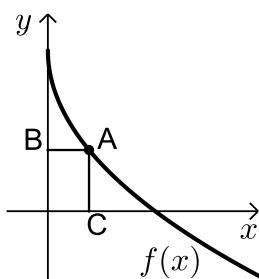


- 9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- מצאו את משוואת המשיק.
 - מסמנים נקודת A על גרף הפונקציה $f(x)$ בربיע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
 - מצאו את שיעורי הנקודה A, עברו אורך הקטע AB הוא מינימלי.
 - מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

10) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.
 מצאו שיעורי נקודת על ה函數 בربיע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצתה על הצירים הוא מינימלי.



- 11) נתונות הפונקציות $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ ו- $f(x) = 2\sqrt{x}$. חיבורו עם הנקודה A של $f(x)$ חיבורו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי?



- 12) באיזור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$.
 הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה בربיע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיזור. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הבינו באמצעות t את סכום הקטעים $AB + AC$.

- ב. מצאו את ערכו של t , עבורו סכום הקטעים הניל יהיה מינימלי.

- 13) נתונות הפונקציות $g(x) = bx^2$ ו- $f(x) = 1 - x^2$. ($b > 0$).
 הפונקציות נחתכו בנקודות A ו-B.
 מצאו את ערכו של b , שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות

A(4,8) (1)

A(0.5,12.25) (2)

S = 8 .ג

t = 1 .ב.

S = 2t^3 - 12t^2 + 18t .א (3)

S = 128 .ב.

A(2,32) .א (4)

A(2,2) (5)

P = ס"מ 12.88 .ג

t = 4 \frac{3}{4} .ב.

P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1} .א (6)

1 \cdot 2 (7)

A(0,4) .ב.

A(2,2) .א (8)

AB = 24 .ג

A(4,7) .ב.

y = -3x - 5 .א (9)

\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) (10)

A(1,2) (11)

t = 2.25 .ב.

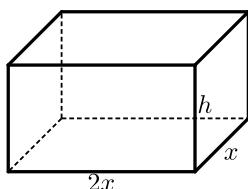
l = t + 6 - 3\sqrt{t} .א (12)

b = 1 (13)

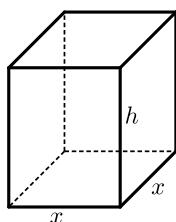
בעיות קיצון בהנדסת המרחב

שאלות

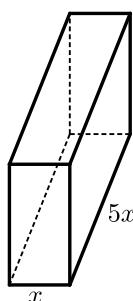
- 1)** נתונה תיבה שבבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



- 2)** נתונה תיבה שבבסיסה הוא מלבן, שבו צלע אחד גדול פי 2 מהצלע הסמוכה לה, כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים: $x+h=9$.
מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



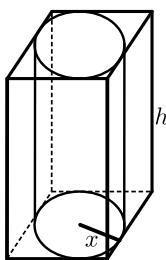
- 3)** נתונה תיבה שגובהה הוא h ובבסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x .
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים $4x+h=63$.
- א. הבינו את h באמצעות x .
 - ב. הבינו את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
 - ג. מה צריך להיות ערכו של x , כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- 4)** ליסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות לתיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק.
ヨוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך.
כמויות הפח שיש בידי יוסי מוגבלות, ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש, כדי להשיג את מטרתו.
מצאו את כמויות הפח המינימלית.

- 5)** לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה, דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים:
החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

- 6)** מכל הגלילים היישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k ,
מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



7) באיזור שלפני מתוארים תיבת שבסיסה ריבוע, וגליל חסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h .

ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות x את נפח הגליל.

1. את נפח התיבה.

2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את x , עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכלתת וישראל.

אורך מקצוע צדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S .

הוכיחו כי $S < 2k^2$.

תשובות סופיות

(1) 4·4·4 ס"מ.

(2) בסיס : 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה : 3 ס"מ.

(3) א. $x = 9$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $h = 63 - 4x$

(4) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו- 5 ס"מ.

(5) 6·3·8 ס"מ.

(6) $\frac{k^3}{216\pi}$ ייחידות נפח = V .

(7) א. $x = 8$ ב. $V = 48x^2 - 4x^3 \cdot 2$ ג. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3 \cdot 1$

(8) שאלת הוכחה.

בעיות קיצון עם תשובה נתונה

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

1) נתוננים שני מספרים חיוביים, p ו- q , שסכוםם a .

הראו, שכאשר מתקיים $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר n ו- m טבעיים).

2) הוכיחו שמלל החגורותים היישרים שנפחים $k\pi$ סמ"ק, החגורות בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חגורת הוא $Rl\pi$, כאשר l הוא הקו היוצר של החגורת)

בעיות קיצון עם תנועה

3) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v^2}{400} + 48$ ש"ל לכל ק"מ נסעה ו- 48 ש"ל לכל שעת נסעה.

הראו ש כדי שהוצאות יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע ב מהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום,

$$\text{היא יכולה לקבל מחיר של } p(x) = -\frac{1}{4}x + 10 \text{ שקל לליטר.}$$

- א. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- ב. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- ג. מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 נס לליטר?
- ד. שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מה מוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת תחוםם שלה.
- ב. אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- ג. אם המחיר הוא 12 נס, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- א. מהו תחום של פונקציית הפדיון?
- ב. שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- ג. מצאו את פונקציית הביקוש ושרטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.

- א. מצאו את תחום הפונקציה.
- ב. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- ג. מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- ד. לאייה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- ב. אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
- ג. متى יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע''י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

א. מצאו את המחיר הנוטן את הפדיון המקסימלי.

ב. מהו הביקוש במקרה זה?

ג. מהו הביקוש השولي בנסיבות מחיר זו? מה משמעותו?

7) פונקציית ההוצאות של יצרן, המיצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?

ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ש.

ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?

ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8) פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.

ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?

ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$.

אייזו מסקנה ניתן להסיק?

9) פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

א. חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.

ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.

ג. חשבו כמה עליה ייחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ-100=x

ל- $x = 101$, והשו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?

ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדול או קטן.

10) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

מהו המקסימום במקרה זה?

11) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 300 + 2Q^2$, ופונקציית עלות $TC(Q) = 20$.

מהי הכמות שעלה היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

מהו המקסימום במקרה זה?

12) ליצרנו פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
 ופונקציית עלות שלilit $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מהי הכמות שעל היצרנו ליצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13) ליצרנו פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
 ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
 מהי הכמות Q שעל היצרנו ליצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

14) ליצרנו פונקציית עלות שלilit $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאש הכמות המיצרת היא $Q = 10$,
 העלות הכוללת היא 225 ₪.

- 15) הוכחו :
- שהרווח המקסימלי מתקיים כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.
 הסבירו את המשמעות הגרפיה.
 - שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקיים כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

16) $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $(x)'C$ – הוצאות שלילות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעת.
 א. האם ניתן שהוצאה שלילת קבועה, למקרה שהוצאה ממוצעת משתנה?
 ב. האם ניתן להפץ?
 ג. הוכחו כי ההוצאה ממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם
 ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה ממוצעת.

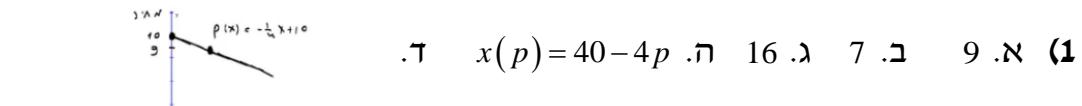
17) מפעל המיצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי ייצור.
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, p_1 ו- p_2 , בהתאם.
 אם משתמשים בו- x יחידות מג'י 1 ובו- y יחידות מג'י 2,
 המפעל מייצר $\sqrt{y} + \sqrt{x}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.

א. הוכחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

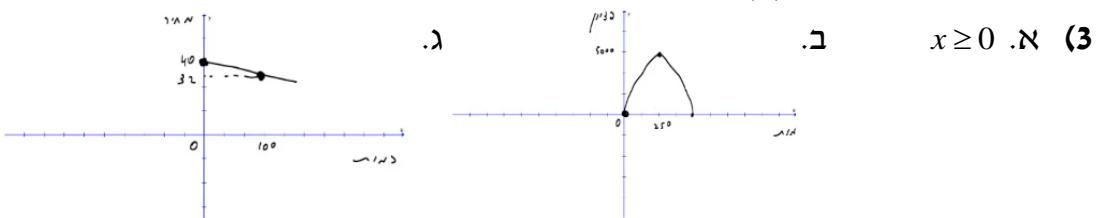
$$\frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$$

כאשר מתקיימת הנוסחה

ב. חשבו את x ו- y עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $A = 372,000$, $p_1 = 100$, $p_2 = 3,000$.

תשובות סופיות

2,160 ג. 2,160 ב. . $x \geq 0$, $R(x) = -0.6x^2 + 120x$ (2)



ב. פונקציית הפדיון : $R(x) = -0.04x^2 + 100x$ $x \geq 0$ (4)

הפדיון הממוצע : $R'(x) = -0.08x + 100$ ג. $x > 0$. $AR(x) = -0.4x + 100$
ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי : 62,500.

א. פונקציית הפדיון : $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$.
הפדיון השולי : $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$.
ג. 30 ; הפדיון המקסימלי : 108,000.

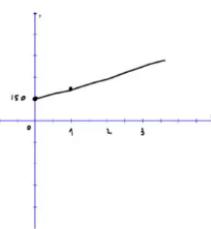
$$Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}}{5}^2 \quad \text{ב. } 33\frac{1}{3} \quad \text{א. } 33\frac{1}{3}$$

ג. $-3\frac{1}{3}$; הعلاות המחיר ביחידת אחת – תקתון את הביקוש ב-3.33 יח' , בערך.

ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל, א. 7 (7)

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. $MC(x) = 5$ ד. 250



ג. 18 לפ ; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידת אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 לפ בערך.

א. 10.8 $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 21.6

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדול.

10) הכמות : 800 , המקסימום : 38,200

11) הכמות : 5 , המקסימום : -250 .

12) 25

13) הכמות : 800 , המקסימום : 38,200

$$TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5 \quad (14)$$

(15) שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה. ב. לא. א. כן.

(16) $x = 4, y = 3600$. ב. שאלת הוכחה.

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

- 1)** יצרכן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למACHINEה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעלה כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50%.
- א. מהו המחיר שהיצרך צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?
 ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.
- 2)** מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגללה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלומים, ל��וחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספת. לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה כדאי לחבר להצעה ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית (כלומר, מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות)?
- 3)** אמן מייצר תכשיטים בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למוכר 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.
- א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.
 ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?
 ג. מהי עלות הייצור של האמן במצב זה (עבור כל התכשיטים)?
- 4)** חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שקל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלומים לכל אחד מהתיירים, בשני דולר. מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שהחברה יהיה הרוחה הגדול ביותר?
- 5)** מחיר שליחת SMS בראשית 'יסלקום' הוא 50agi, ומספר-h-SMSים החודשי הממוצע הוא 200. על כל 5agi 'יסלקום' מעלה – יורץ מספר-h-SMSים החודשי הממוצע בעשר. מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסה של 'יסלקום' תהיה מקסימלית.

- 6) קולנוו 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכל כרטיס. כל הורדה של מחיר הסרטים בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.
- מה צריך להיות מחיר הסרטים, כדי שהכנסתו של בית הקולנוו תהיה הגדולה ביותר? מצאו גם מהי הכנסה המקסימלית.
- 7) הייצור של בובות 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ニיקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למוכר 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מorigida ממחיר הבובה, היא מצליחה למוכר 10 בובות נוספת ליום.
- מהו הרוחן היומי המקסימלי של החברה?
- 8) חברת 'אופיס דיפי' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מה מוצרים היא מוכרת ברוחן של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברוחן של 2 ₪ לכל מוצר. הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- 9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים במחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל x זוגות אופניים נוספים שהוא מוכרת, היא מorigida – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מorigida רק ב- x ₪ לזוג אופניים.
- מה מספר זוגות האופניים שעלה החברה למוכר, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

- 1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- 2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- 3) א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪
- 4) 40
- 5) 75agi.
- 6) מחיר הסרטים : 30 ₪, הכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.
- 7) 4,500 ₪.
- 8) שאלת הוכחה.
- 9) 350

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 13 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקובל

תוכן העניינים

154	1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה.
157	2. פתרון משוואות פולינומיאליות.
159	3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקובל של משוואות.

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

בשאלה 1-4 הוכחו שלמשוואות יש בדיק פתרון אחד :

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4)$$

(5) נתונה המשוואה $b^2 < 3ac$, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ונთנו כי מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות 6-9, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה :

$$e^{x-1} = x \quad (6)$$

$$\arctan x - x = 0 \quad (7)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (8)$$

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (9)$$

(10) תהי $f'(x) \leq 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, המקיים : הוכחו שלמשואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיק פתרון אחד.

הוכחו שלמשוואות בשאלה 11-13 יש בדיק שני פתרונות :

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (13)$$

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (12)$$

$$e^x - 5x = 0 \quad (11)$$

בכל אחת מהמשוואות 14-17, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיק פתרון אחד (הנicho שכל הפרמטרים שונים מאפס) :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (14)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (15)$$

$$x + a \cos(bx) = 1 \quad (16)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (17)$$

18) מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x + e^x = a$ כאשר a קבוע ממשי.

19) הוכיחו שלמשוואת $2ax^3 + a^2 + x^2 = 0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר a קבוע ממשי.

20) הוכיחו שלמשוואת $x^2 + 5x + 1 = x^3 + x^2$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.

הערה: שאלת זו יש לפטור תוך שימוש במשפט רול.

21) נתון הפולינום $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + cx - 1$.
א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.

ב. נתון בנוסף כי $|c| < 1$.
מה מספר השורשים של הפולינום?

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) פתרון יחיד.

$$x = 1 \quad (6)$$

$$x = 0 \quad (7)$$

$$x = -4 \quad (8)$$

$$x = 0 \quad (9)$$

- (10) שאלת הוכחה.

- (11) שאלת הוכחה.

- (12) שאלת הוכחה.

- (13) שאלת הוכחה.

$$b^2 - 4ac = 0 \quad (14)$$

$$4b^2 - 12ac < 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{ab} < -1, \frac{1}{ab} > 1 \quad (16)$$

$$b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0 \quad (17)$$

(18) אם $a = 0$, למשואה אין פתרון. אם $a \neq 0$, למשואה יש פתרון יחיד.

- (19) שאלת הוכחה.

- (20) שאלת הוכחה.

(21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

פתרונות משוואות פולינומיאליות

שאלות

מצמכו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

פתרו את המשוואות הבאות :

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (4)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (5)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (7)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (9)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (10)$$

$$7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x-2} \quad (3)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (4)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (6)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (7)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (8)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (9)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (10)$$

$$\text{. } x = 0.8459 : \text{פתרון מקורב} \quad (11)$$

שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקרוב של משוואות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה 2 בשיטת ניוטון-רפסון) :

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (1)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (2)$$

תשובות סופיות

1) פתרון מדויק $x = -1$.

2) פתרונות מקרובים : $x = 0.5576$, $x = 1.9672$.

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 14 - משפטים הערך הממוצע של רול, לגראנץ', קושי ודרבו

תוכן העניינים

1. משפט רול.....	160
2. משפט לגראנץ' - הוכחת אי שוויוניות בקטע [a,b].....	164
3. משפט לגראנץ' - הוכחת אי שוויוניות בקטע [x,0].....	166
4. משפט לגראנץ' - הוכחת אי שוויוניות עם מספרים.....	167
5. משפט לגראנץ' - שאלות כלליות	168
6. משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי	172
7. משפט דרבו	174

משפט רול

שאלות

1) בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \quad [0, 2] \text{ א.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2} \quad [-1, 1] \text{ ב.}$$

2) נתו ש- $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$.
 הראו ש- $f'(c) = 0$, אך אין נקודת c , כך ש-
 האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- \mathbb{R} ,
 ונניח שקיים שלוש נקודות שונות, x_0, x_1, x_2 , עבורן
 הוכיחו שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c) = 0$.

4) תהי $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמיים.
 נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$
 הוכיחו שקיים $x_0 \in (0, 1)$, כך ש- $f'''(x_0) = 0$.

5) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמיים.
 נניח שקיימים $a < c < d < b$ כך ש-
 הראו שלמשווה $f'(c) = f'(d) = 0$ יש פתרון.

6) נתו כי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.
 נתו בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודות מינימום מקומית ב- $x_0 = 2$.
 הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

7) נתונה פונקציה f , גזירה ב- \mathbb{R} .

תהי $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ המוגדרת על ידי
הראו כי g גזירה ב- \mathbb{R} , והוכחו כי הנגזרת, $'g$,
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1, 1)$.

8) הוכחו:

אם f גזירה ב- \mathbb{R} ו- $f(1) = 0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי
 $g(x) = xf(x)$, גזירה ב- \mathbb{R} , וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x) = 0$.

9) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) > 0$ ו- $f(1) < 0$ לכל $0 < x \leq 1$.

הוכחו שקיים $c \in (0, 1)$, כך ש-

$$\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = 2 \frac{f'(c)}{f(c)}$$

10) אם $(c_i \in \mathbb{R})$ $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$

הוכחו שלמשוואה $c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0, 1)$.

11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0, f(1) = 1$.

הראו שלמשוואה $x f'(x) = 2$ קיים פתרון בקטע $(0, 1)$.

12) תהי $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות.

נניח שלכל x ממשי מתקאים $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$.

הראו שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g .

13) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה,

כך ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $f'(0) > 0, f'(1) < 0$.

א. הוכחו שקיים סיבוב שמאלית של 1, שבו הפונקציה הנתונה שלילית.

ב. הוכחו שקיים סיבוב ימנית של 0, שבו הפונקציה הנתונה חיובית.

ג. הוכחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0, 1)$.

14) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$\text{נניח שלכל } n \text{ טבעי } f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

חשבו את $f''(0)$.

ב. תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0) > 0$.

$$\text{הוכחו שקיימים } n \text{ טבעי, כך ש-} 1 - \frac{1}{n} \neq 0$$

15) תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$\text{נניח שלכל } n \text{ טבעי } f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

חשבו את $f''(1)$.

16) נתון כי f, g גזירות לכל x וכי $0 \neq f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ ב- \mathbb{R} .

הוכחו שלמשוואת $A = f(x)g(x)$ יש לכל היותר פתרון אחד.

A קבוע כלשהו.

17) נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- \mathbb{R} .

תהיה x_0 נקודת כלשהי.

הוכחו כי לגרף של $y = f(x)$ ולישר המשיק בנקודת x_0 יש נקודת משותפת אחת ויחידה $-x_0$.

במילים אחרות: הוכחו כי הגרף של $y = f(x)$ נמצא כולו מעל המשיק או מתחתיו.

18) נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a, b) , ולכל $x \in (a, b)$ מתקיים

$$(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x).$$

נתון שלמשוואת $0 = f'(x)$ יש שלושה פתרונות בקטע.

הוכחו שלמשוואת $0 = f(x)$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.

תנו דוגמה לפונקציה f המקיים $(f'(x))^2 = f(x) \cdot f''(x)$.

19) נתון כי $f(x), g(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) .

נתון בנוסף כי $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$

הוכחו שקיימת נקודת c ב- $a < c < b$ כך ש- $f'(c) = g'(c)$.

20) הפונקציות f ו- g רציפות ב- $[a, b]$ וגזירות ב- (a, b) .

ידוע כי $f(a) \geq g(a)$ ו- $f'(x) > g'(x)$ ב- (a, b) .

הוכחו כי $f(x) > g(x)$ ב- (a, b) .

תשובות סופיות

1) א. $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
ב. $\pm \sqrt{3}$

2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.

14) א. 0
ב. שאלת הוכחה.

15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנ' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם :

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (3)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b) - \operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b) - \operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

$$(1 < a < b < 3) \quad \ln b - \ln a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{4}(b-a) \quad (11)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (12)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (13)$$

$$(x < y) \quad |\arctan y - \arctan x| \leq |y - x| \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראן' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם :

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2)$$

$$(0 < x < 1) x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arsinh}(x) < x \quad (4)$$

$$(0 < x < 1) x < \operatorname{artanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6)$$

$$(x > 0) 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(x > 0) \sin x \leq x \quad (8)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \tan x < 4x \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנ' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים :

$$\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2)$$

$$\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנץ' – שאלות כלליות

שאלות

1) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x , המקיימת $|f'(x)| \leq 5$.

ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$.

הוכחו כי $f(2) = 8$.

2) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x , המקיימת $|f'(x)| \leq 7$.

ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$.

הוכחו כי $4 \leq f(2) \leq 10$.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$, ונניח ש-

- . $f(c) > 0$, כך ש- $c \in (a, b)$, כאשר
- . $f''(m) < 0$ בקטע (a, b) , כך ש-

הוכחו שקיים נקודה m בקטע (a, b) .

4) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) , כך ש- f' חסומה בקטע (a, b) .

א. הוכחו שקיימים $0 < M < \infty$, כך שלכל x ו- y ב- (a, b) מתקיים:

$$|f(y) - f(x)| \leq M |y - x|.$$

ב. הוכחו ש- f רציפה במידה שווה ב- (a, b) .

כלומר, הוכחו שלכל $0 < \varepsilon < \infty$ קיים $\delta > 0$, כך שלכל x ו- y ב- (a, b)

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad |x - y| < \delta.$$

5) נניח כי f רציפה ב- $(0, \infty)$ וגזירה ב- $(0, \infty)$.

כמו כן, $f(0) = 0$, ו- f' מונוטונית עולה.

א. הוכחו כי $\frac{f(x)}{x} > \frac{f'(x)}{x}$ ב- $(0, \infty)$.

ב. הוכחו כי $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0, \infty)$.

6) תהינה f, g פונקציות רציפות ב- $(-\infty, a]$ וגזירות ב- (a, ∞) .

נתון כי $f(a) = g(a)$ ו- $f'(x) \leq g'(x)$ לכל $x > a$.
הוכיחו כי $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \geq a$.

7) נניח כי f גזירה ב- $(\infty, 0)$.

א. נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.
 ב. נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

8) תהי f פונקציה גזירה לכל x .
הוכח:

א. אם הגבולות $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ קיימים, אז הם שווים זה לזה.

ב. אם $L = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = L$ (ללא שימוש בכלל לפיטול).

ג. ייתכן שהגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ קיים אבל הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ לא קיים.

ד. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ קיים אז גם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ קיים ושני הגבולות
שווים זה לזה.

ה. אם $0 < L < \infty$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) < 0$.
הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

9) נניח כי f גזירה ב- \mathbb{R} .

האם נכון לומר כי מתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$?
הוכיחו או הפריכו.

הערה: למרות שתרגול זה אפשרי ללא שימוש במשפט לגראנץ,
הנכsty אוטו כאן בזכות הקשר שלו לשאלת הקודמת.

10) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$: פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)| < 1$ לכל $0 \leq x \leq 1$.
הוכיחו שקיימים לכל היותר c אחד ב- $[0, 1]$, כך ש- $f(c) = c$.

11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$: פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)| < 0$ לכל $0 \leq x \leq 1$.
הוכיחו שקיימים בדיק c אחד ב- $[0, 1]$, כך ש- $f(c) = c^2$.

12) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a,b]$.

הוכיחו שקיים $c_1, c_2, c_3 \in (a,b)$ כך ש- $c_2 \neq c_3$ ו- $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3)$.

13) תהי $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בעמיה.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0, f(0))$ ו- $(1, f(1))$, חותך את הגרף של f בנקודה $(a, f(a))$, כאשר $0 < a < 1$. הוכיחו שקיים $x_0 \in [0,1]$ כך ש- $f''(x_0) = 0$.

14) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח ש- f גזירה ב- (a,b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$, כאשר $f'(a)$ קיים ו- $L = f'_+(a)$.

15) תהי $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0) = 0$.

נניח שלכל $x \in [0,1]$ מתקיים $|f'(x)| \leq |f(x)|$. הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל $x \in [0,1]$.

16) נתון כי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) .

א. ידוע כי $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a,b)$.

הוכיחו כי f קבועה ב- $[a,b]$.

ב. ידוע כי $f'(x) = m$ לכל $x \in (a,b)$.

הוכיחו כי f לינארית ב- $[a,b]$.

17) ענו על הטעיפים הבאים:

א. נתון כי f, g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) .

ידוע כי $f'(x) = g'(x)$ לכל $x \in (a,b)$.

הוכיחו כי $f(x) + g(x) = c$ ב- $[a,b]$.

ב. הוכיחו כי $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

18) נתון כי f גזירה בקטע (a,b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

א. הוכח כי f' לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח f' שואפת ל- ∞ או $-\infty$?

תשובות סופיות

8) ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט הערך הממוצע המובלל של קושי

שאלות

- 1) הוכחו שלכל $b > a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n(\ln b - \ln a) < b^n - a^n \leq 1$ מתקיים, כאשר $\ln b - \ln a < 1$.
- 2) הוכחו כי עבור כל $a < b < 0$, המקיימים $0 < \arctan b - \arctan a < \frac{b}{1+b^2}$ מתקיים:
$$\frac{a}{1+a^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\ln b - \ln a} < \frac{b}{1+b^2}$$
- 3) הוכחו כי עבור כל $a < b < 0$, המקיימים $1 < \frac{2\sqrt{b}}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} < \frac{2\sqrt{a}}{1+a^2}$ מתקיים.
- 4) הוכחו כי $|\tan y - \tan x| \leq 8|\sin x - \sin y|$ לכל $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$.
- 5) הוכחו כי $\arctan x > \ln(1+x)$ לכל $x \in (0, 1)$.
- 6) הוכחו שלכל $0 < x \neq \frac{\pi}{2}$ מתקיים $\cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2$.
- 7) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0, 1]$ וגזירה ב- $(0, 1)$.
הוכחו שבckett $f'(1) - f'(0) = \frac{f'(x)}{2x}$ קיימים פתרון למשוואה $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$.
- 8) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0, 1]$ וגזירה ב- $(0, 1)$, ויהי n מספר טבעי כלשהו.
הוכחו שקיים $0 < c < 1$, המקיים $f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{nc^{n-1}}$.
- 9) יהיו a ו- b מספרים חיוביים כלשהם.
הוכחו שקיים פתרון למשוואה $(a^3 - b^3)\cos x = 3x^2(\sin a - \sin b)$.

10) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a,b]$, כאשר $a \geq 0$.

$$\cdot \frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2} \text{ כז ש-} \\ \text{הוכיחו שקיימים } c_1, c_2 \in [a,b] \text{ כך}$$

11) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, כאשר $ab > 0$.

$$f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} \text{ הוכיחו שלמשוואת} \\ \text{קיים פתרון בקטע } [a,b].$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט דרבו

שאלות

1) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת ? $f'(x) = \begin{cases} 4x & x < 1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

2) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת ? $f'(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

3) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת ? $f'(x) = \begin{cases} 4 & x=0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$

4) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת ? $f'(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases}$

5) ענו על הטעיפים הבאים :

א. תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0 \in (a,b)$. הוכחו :

אם f לא רציפה ב- x_0 , אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.

ב. האם קיימת פונקציה f , גזירה ב- \mathbb{R} ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי ? $f'(x) = \begin{cases} 4 & x=0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$

6) ענו על הטעיפים הבאים :

א. תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0 \in (a,b)$. הוכחו :

אם f לא רציפה ב- x_0 , אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.

ב. האם קיימת פונקציה f גזירה ב- \mathbb{R} ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי ? $f'(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$: פונקציה גזירה, ותהי $x_0 \in (a,b)$

הוכיחו:

. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \neq \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \neq \pm\infty$, אז f' לא רציפה ב- x_0 ,

כלומר, x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסווג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה f , גזירה ב- \mathbb{R} ,

$$? f'(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

שהנגזרת שלה נתונה על ידי

8) האם קיימת פונקציה f , גזירה ב- $[0,1]$,

$$? f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

שהנגזרת שלה ב- $[0,1]$ נתונה על ידי

9) תהי f פונקציה גזירה ב- \mathbb{R} , ונניח כי $f(0) = 0, f(1) = f(2) = 1$

$$\text{הוכיחו שקיימים } x \in (0,2) \text{ שבעבורו } f'(x) = \frac{1}{4}$$

10) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) , ומקיימת $0 \neq f'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$.
הוכיחו כי f מונוטונית בקטע (a,b) .

11) ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיים את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).
האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיים גם את משפטי ויירשטראס?
הוכיחו או הפריכו זאת.

12) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $2 \leq f(x) \leq 0$, לכל x בקטע.
הוכיחו כי קיימת נקודת x ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x) = x^2 + x$.

13) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $1 \leq f(x) \leq 0$, לכל x בקטע.
הוכיחו כי קיימת נקודת x ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

14) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$, המקיים $0 \leq f'(x) \leq 1$, לכל x בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודת x בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

15) תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$: f פונקציה גזירה, לא קבועה שמקיימת $0 = f(1) = f(0)$.
הוכיחו שקיימים x ב- $(0,1)$, שעבורו $f'(x)$ רצינוני השונה מ-0.

תשובות סופיות

1) לא.

2) לא.

3) לא.

4) לא.

5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

8) לא.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 15 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

177	1. טור טיילור וטור מקלורן
179	2. טור טיילור סביב $X=0$
180	3. חישוב סכום של טור
181	4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
182	5. חישובים מקרובים עם השארית של לייבנץ
184	6. חישוב מקרוב של אינטגרל מסוים
185	7. חישובים מקרובים עם השארית של לגראנז'
191	8. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור טיילור וטור מקלורו

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביבה $x=0$ (טור מקלורו) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2)$$

$$f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6)$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad (5)$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9)$$

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8)$$

$$f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (20)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להזכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
 לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להזכיר את הנושא גזירה ואנטגרציה של טורי מקלורו.
 אפשר להיעזר בפתרונות הידועים לטור מקלורו המופיעים בספר.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורו של הפונקציות (נדרש ידוע ככפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27)$$

$$f(x) = \tan x \quad (26)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9) \quad (-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < 5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16)$$

$$(|x| < 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(-1 < x \leq 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \quad \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26)$$

$$1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{25}{24} x^4 - \frac{331}{720} x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב x_0 של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2} \right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1) \\ (0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2) \\ (0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3) \\ (-\infty < x < \infty)$$

чисוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$\pi/4 \quad (5)$

$2e \quad (4)$

$\sqrt{e} \quad (3)$

$e^{-2} \quad (2)$

$e \quad (1)$

$\ln \frac{3}{2} \quad (9)$

$\ln 2 \quad (8)$

$\cos 1 \quad (7)$

$\sin 1 \quad (6)$

чисוב גבולות בעזרת טורי מקלון

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

$$(4) \text{ נתון כי } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k \text{ כאשר } k \text{ קבוע שונה מאפס.}
מצאו את } n \text{ ואת } k.$$

$$(5) \text{ חשבו את הגבול} \lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

чисובים מקורבים עם השארית של ליבנץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3)$$

$$\sin 3^\circ \quad (2)$$

$$\frac{1}{e} \quad (1)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלרון, והעריכו את השגיאה בחישוב :

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (6)$$

$$(n=1) \cos 4^\circ \quad (5)$$

$$(n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4)$$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$?

10) עברו אילו ערכי x , כך שהשגיאה הקטנה מ-0.001? $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$

11) עברו אילו ערכי x , כך שהשגיאה הקטנה מ-0.01? $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$

תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{1}{48}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\pi \cdot \pi}{4050}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{160}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{77}{192} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi / 6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad (11)$$

чисוב מקובל של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

чисובים מוקרבים עם השארית של לגראנץ'

1) א. רשמו את נוסחת טילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב 0 כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $0 < x$ מתקיים :

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב ? $|x| < 0.1$

2) א. רשמו את נוסחת טילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב 0 כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $0 < x$ מתקיים :

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טילור מסדר ראשון לפונקציה x סביב 0 כולל שארית לגראנץ'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $1 < x < 0$ מתקיים :

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב 16 כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים :

א. על ידי שימוש בטור טילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

$$7) \text{ נתונה } f(x) = \sqrt{1+x}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $1 \leq x \leq 0$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $0 \geq x$ מתקיים $x \leq \sqrt{1+x}$.

$$8) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3 עבור $0.9 \leq x \leq 0.1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.
- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$0.1 \leq x \leq 0.9, \frac{1}{1+x} \cong 1-x+x^2-x^3$$

ג. הוכחו כי עבור $x < -1$ מתקיים $\frac{1}{1+x} \geq 1-x+x^2-x^3$.

$$9) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$|x| \leq 0.5, \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cong 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$$

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$, עבור $-1 < x$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנזי.

ב. חשבו את \sqrt{e} ברמת דיוק של 10^{-4} .

- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$e^x \cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}, \text{ עבור } 0 \leq x \leq 1$$

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שבעורו 10^{-5} .

11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של גראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :

$$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $0 < x$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} < \ln(1+x) < x$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,

ונניח ש- $f(0) = f(1)$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$.

$$\text{הוכיחו כי } |f'(x)| \leq \frac{M}{2} \text{ לכל } 0 \leq x \leq 1.$$

13) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ פונקציה גזירה פעמיים המקיים $f(-1) = f(1) = 0$.

כמו כן, נתון כי קיימים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.

$$\text{הוכיחו שלכל } -1 \leq x \leq 1 \text{ מתקיים } |f(x)| \leq \frac{M}{2}.$$

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(-\infty, 0)$, ונניח כי $M \leq |f'(x)|$ לכל $x < 0$.

$$\text{הוכיחו כי } 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}.$$

15) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיים $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$.

ונניח כי $x_0 \in [a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y - \cos x \geq (x - y) \sin x$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$$M_0 = \sup_{x \geq a} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x \geq a} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \geq a} |f''(x)|$$

$$\text{הוכיחו כי : } (M_1)^2 \leq 4M_0 M_2.$$

17) נתנו ש- f גזירה פעמימה ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

תשובות סופיות

1) א. נוסחה : $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$
 . $\frac{5}{663552}$, שגיאה בקירוב :

$$\sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$$

ב. שאלת הוכחה.

2) א. נוסחה : $\tan 0.1 = \frac{1}{10}$, $\tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, שגיאה בקירוב :

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה : $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$
 . $\frac{1}{512}$, שגיאה בקירוב :

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$$

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה : $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$
 . $\frac{1}{3130}$, שגיאה בקירוב :

$$\sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}$$

5) $\sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$

$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3$. **ב.** $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\frac{\pi^3}{5}}{3!} + \frac{\frac{\pi^5}{5}}{5!} - \frac{\frac{\pi^7}{5}}{7!}$. **א.** **6)**

7) א. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$, בשגיאת הקטנה מ- 0.25. ב.

8) א. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$ בשגיאת הקטנה מ-

ב. שגיאת הקטנה מ-. **ג.** שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ בשגיאת הקטנה מ-

ב. השגיאת המקסימלית היא . **ג.** ראו בסרטון.

10) א. $\sqrt{e} = 1.6487$ ב. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$

ג. $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$. **ד.** $\frac{3}{(n+1)!}$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} . \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} . \quad \text{ב.}$$

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} . \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז علينا לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעתו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.0005 = 0.5 \times 10^{-3}$. בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקרים מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

תחום התכנסות

$$-\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$$

$$-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$$

$$-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$$

$$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 16 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מיידיים.....	192
2. מציאת פונקציה קדומה.....	195

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתרונות על ידי הכלל : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int x^4 dx \quad (2)$$

$$\int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

(פתרונות על ידי הכלל : $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14)$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתרונות על ידי הכלל : $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 29-27 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \right) \text{ (פתרה על ידי הכלל)}$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(30) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c \right) \text{ (פתרה על ידי הכלל)}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 33-31 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$

$$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$

$$4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$

$$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$

$$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$

$$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$

$$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{\left(200\right)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$

$$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{\frac{-4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

1) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה נגזרת של פונקציה : $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה נגזרת של פונקציה : $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.

שיעור המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה : $f''(x) = 6x + 6$.

שיעור הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12 ,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה : $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.

השיעור לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.

- 8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$,
 ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$
- מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 - חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 - מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 - תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $'(G(x) - f(x))$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12\frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

g. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$. b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

h. 0 d. נקודת פיתול אחת $(0,0)$.

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 17 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים 197

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת הצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \quad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1) x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c \quad (3)$$

$$\ln|\sin x| + c \quad (2)$$

$$\ln|x^2 + 1| + c \quad (1)$$

$$e^x \ln|e^x + 1| + c \quad (6)$$

$$\ln|\ln|x|| + c \quad (5)$$

$$-\ln|\cos x| + c \quad (4)$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad (9)$$

$$e^{\tan x} + c \quad (8)$$

$$e^{x^2} + c \quad (7)$$

$$\sin(\ln x) + c \quad (12)$$

$$\sin(\sin x) + c \quad (11)$$

$$\sin(2x^2 + 1) + c \quad (10)$$

$$-2 \cos(\sqrt{x}) + c \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}(\tan x)^2 + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c \quad (16)$$

$$\frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \quad (21)$$

$$\sqrt{2 \sin x} + c \quad (20)$$

$$2\sqrt{x^2 + 1} + c \quad (19)$$

$$\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (24)$$

$$\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (23)$$

$$\frac{2}{9}(x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c \quad (22)$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 18 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת 199

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3)$$

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2)$$

$$\int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5)$$

$$\int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11)$$

$$\int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int x \arctan x dx \quad (14)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17)$$

$$\int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20)$$

$$\int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23)$$

$$\int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

(31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$

(32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$.

תשובות סופיות

(1) $xe^x - e^x + c$

(2) $\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c$

(3) $x \cos x + \sin x + c$

(4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

(5) $-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c$

(6) $-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} xe^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c$

(7) $x \ln x - x + c$

(8) $-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c$

(9) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c$

(10) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

(11) $\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c$

(12) $x \tan x + \ln |\cos x| + c$

(13) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$

(14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c$

(15) $\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c$

(16) $x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c$

(17) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c$

(18) $-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c$

(19) $\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c$

(20) $\frac{x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4}(\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5(\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n}(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4}(-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5(x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 19 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

203.....
1. אינטגרלים בשיטת ההצבה.....

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4} \right)^5}{5} - \frac{4}{3} \left(\sqrt{x^3+4} \right)^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x \left(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6 \right) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6 \left(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x} \right) + c \quad (23)$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^4}{4} + c \quad (24)$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 20 - אינטגרלים של פונקציות רצינליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רצינלית.....	206
2. חילוק פולינומיים ואינטגרלים של פונקציה רצינלית.....	208
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רצינלית.....	209

אינטגרלים של פונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומיים וaintגרלים של פונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שימושיים הצבה ופונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln \left| 1 - \sqrt[3]{x^2} \right| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{\left(1 + \sqrt[6]{x} \right)^3}{3} - \frac{3\left(1 + \sqrt[6]{x} \right)}{2} + 3\left(1 + \sqrt[6]{x} \right) - \ln \left| 1 + \sqrt[6]{x} \right| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right)^2}{3} - \frac{3\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right)^2}{2} + 3\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right) - \ln \left| 1 + \sqrt[4]{x-1} \right| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln \left| \sqrt[3]{x} + 1 \right| - \frac{1}{2} \ln \left(\left(\sqrt[3]{x} - 0.5 \right)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln \left| 1 + e^x \right| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 21 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא	(ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות	211
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות.....	213
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית	214
5. הצבות טריגונומטריות שມטרתן להיפטר משורשים.....	215
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות	218

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	זכור כי :
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$	
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$	
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$	
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$	

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$$

$$\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t)(-dt)$$

זכור כי:

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

(2) $\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx$

(1) $\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx$

(4) $\int \sin^3 2x dx$

(3) $\int \cos^3 x dx$

(6) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$

(5) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

(8) $\int \tan^5 x dx$

(7) $\int \cos^5 x dx$

(10) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(9) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

(12) $\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx$

(11) $\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx$

תשובות סופיות

(2) $\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c$

(1) $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c$

(4) $-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c$

(3) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

(6) $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$

(5) $\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c$

(8) $\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c$

(7) $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c$

(10) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c$

(9) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$

(12) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c$

(11) $-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

זכור כי:

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמשתarten להיפטר משורשים

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}}$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה : כדי לפתרו את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רצינליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \left(\arcsin\frac{x}{2} \right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin\frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan\frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} + c \quad (10)$$

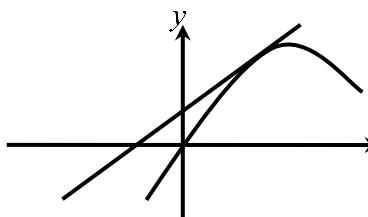
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

чисוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2 \sin x$.

בתוחום שבין ראשית הצירים لنקודת המקסימום הראשונה
מיינינה העבירו לפונקציה משיק ששיופעו 1.



א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק וציר ה- x , בריבוע הראשון והשני.

2) באIOR שלහן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$

בתוחום $\pi \leq x \leq 1.75\pi$.



השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

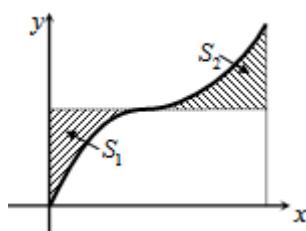
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

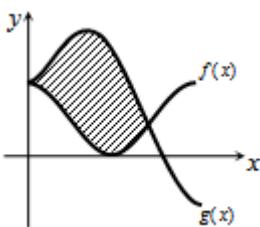
ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

3) באIOR שלහן נתונה הפונקציה $y = \sin x + x$, בתוחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

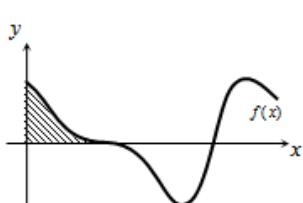
ב. נוריד אנך מגראף הפונקציה לציר ה- x בנקודת שבה $x = 2\pi$,
ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בشرطוט, S_1 ו- S_2 , שווים.





4) באIOR שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$, בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
- חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
- השתמשו בזיהות $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



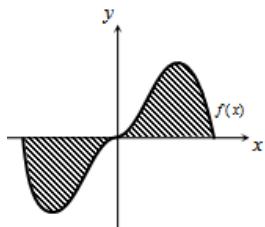
5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$

- מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיים $f'(x) = 0$, בתחום $0 < x < 2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קייזון, נמצאת על ציר ה- x .

- מצאו את הפונקציה $f(x)$.

6) באIOR שלහלן מתואר גраф הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה והצירים.



6) נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$

- הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא

באיור שלහלן נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \sin x$, בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

- הראו כי גраф הפונקציה עובר בראשית הצירים.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

ב. π ייח"ש. א. $y = x + 2$ (1)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538 \quad \text{ב. } y = 1 \quad \text{א. } (1)$$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.

$$S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934 \quad \text{ב. } S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299 \quad \text{א. } (0,1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) (3)$$

$$\text{ג. } f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad \text{א. } (4)$$

. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ ג. ב. שאלת הוכחה. (5)

$$b = -2, a = 2 \quad (6)$$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(a + \beta) + \cos(a - \beta)) \end{cases}$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 22 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א.....	222
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים	228
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדלה, אינטגרביליות.....	231
4. משפטי האינטגרביליות.....	234
5. אינטגרביליות לפי דארבו.....	235
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית.....	237

הaintgral המסויים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 xe^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4 + |x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

10) הוכיחו כי :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx . \text{ א.}$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx . \text{ ב.}$$

11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f :

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx . \text{ א.}$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx . \text{ ב.}$$

12) תהיו $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 .$$

13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx .$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx .$$

16) נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx . \text{ א. אם } f \text{ זוגית, אז}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 . \text{ ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אז}$$

чисבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x , ונתון כי $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$$\cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right) dx \quad \text{чисבו את האינטגרל}$$

20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ג. } (n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx$$

21) (ازהרה לגבי שיטת הצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, בעזרת הצבה $t = \frac{1}{x}$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' וב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$\cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx \quad (22)$$

23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בעזרת הצבה $x = \tan t$ חשבו את האינטגרל $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

24) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x} dx$

25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם ה軸.

החיבוי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$

עם ה軸. חשבו את ערך החיבוי של ציר x .

$$\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

26) הוכחו:

אם f פונקציה רציפה ומוחזרת על כל הישר ואם T המחזור של f

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

27) הוכחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב- $[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t) dt = 0$ וגם

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0 \text{ אז } \int_a^b g(t) dt = 0$$

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\int_0^x f(t) dt = g(x) \text{ אי-זוגית.}$$

תשובות סופיות

$$-6 \quad \text{(1)}$$

$$\ln\left(\frac{15}{8}\right) \quad \text{(2)}$$

$$-2e^{-1} + 1 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{(4)}$$

$$\arctan 6 - \arctan 3 \quad \text{(5)}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{(6)}$$

$$\frac{17}{12} \quad \text{(7)}$$

$$\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5}) \quad \text{(8)}$$

$$\frac{17}{6} \quad \text{(9)}$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

$$x = e^2 \quad \text{(12)}$$

$$0 \quad \text{(13)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{(14)}$$

$$\frac{\pi^2}{4} \quad \text{(15)}$$

(16) שאלת הוכחה.

$$0 \quad \text{(17)}$$

$$2\arctan 4 \quad \text{(18)}$$

$$0 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ א, ב, ג.} \quad \text{(20)}$$

$$\text{ג. ראו בסרטון.} \quad \text{ב. } \frac{\pi}{2} \quad \text{א. 0} \quad \text{(21)}$$

(22) שאלת הוכחה.

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ ב.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c \text{ א.} \quad \text{(23)}$$

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \quad \text{(24)}$$

$$1 - \sqrt{3} \quad \text{(25)}$$

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

(1) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי $M \leq f(x) \leq m$ לכל x בקטע $[a,b]$.

$$\text{הוכיחו כי } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 10-2 :

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,

$$\text{הוכיחו כי } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(12) תהי $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיים לכל $x \in [0,1]$ $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$. הוכיחו כי $f(0) = 0$ לכל $x \in [0,1]$.

(13) תהי $f : [0,a] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f''(x) > 0$ לכל $x \in [0,a]$. הוכיחו כי $\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$. תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)| dt = 0$. הוכיחו כי לכל x בקטע (a,b) , מתקיים $g(x) = 0$.

(15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x) dx > 1$. הוכיחו שקיימים x_0 בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

(16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$. הוכיחו כי $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$.

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$

(18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b)

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2} \text{ אז } f(a)=0 \text{ וכן } f'(x) \leq M \text{ וגם}$$

(19) יהיו $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c \in [a,b]$ כך שה-

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הaintegral המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\text{חסבו : } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad (8)$$

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שמלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן) :

$$1+2+3+\dots+n = 0.5n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

תוכלו להיעזר בזיהויות הבאות :

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

13) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2 dx$

14) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

רמז : השתמשו בחלוקת הבאה של הקטע
 $P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad \text{(1)}$$

$$1 - \cos 1 \quad \text{(2)}$$

$$\ln 2 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{(4)}$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad \text{(5)}$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad \text{(6)}$$

$$\ln 2 \quad \text{(7)}$$

$$-1 \quad \text{(8)}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{(9)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{(10)}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{(11)}$$

$$2 \quad \text{(12)}$$

$$21 \quad \text{(13)}$$

$$0.5 \quad \text{(14)}$$

משפט האינטגרביליות

שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

$$[a,b] = [0,2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} . \quad \text{א.}$$

$$[a,b] = [-4,14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} . \quad \text{ב.}$$

$$[a,b] = [0,9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} . \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.
- ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסויים שאינה אינטגרבילית בו.
- ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטען בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכון או לא נכון. נמקו.

- א. קיימת פונקציה אינטגרבילית f , בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
- ב. קיימת פונקציה f , החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) , שאינה אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

$$\text{נcona הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינטגרביליות לפי דארבו

שאלות

1) נתונה $\mathbb{R} \rightarrow [0,1] : f$, המוגדרת על ידי $x = f(x)$.

- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

2) נתונה $\mathbb{R} \rightarrow [0,2] : f$ המוגדרת על ידי $x^2 = f(x)$.

- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

$$3) \text{ נתונה הפונקציה הבאה} \\ f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

4) נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ בקטע $[0,1]$.

- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה f , כך ש- $|f|$ ו- f^2 אינטגרביליות,
אך f לא אינטגרבילית.

5) תהי $\mathbb{R} \rightarrow [a,b] : f$ פונקציה חסומה.

נניח שקייםת חלוקה P של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P,f) = U(P,f)$.

הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

6) תהי $\mathbb{R} \rightarrow [a,b] : f$ פונקציה חסומה.

נניח שקייםת חלוקה P_n של הקטע $[a,b]$, כך ש- $0 \rightarrow U(P_n,f) - L(P_n,f)$.

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קритריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א. $f(x) = x$, בקטע $[0,1]$.

ב. $f(x) = x^2$, בקטע $[0,2]$.

8) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קритריון רימן.

תשובות סופיות

$$\int_0^1 f dx = \frac{1}{2} \text{. ב. } \overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f = \frac{1}{2} \text{. א. (1)}$$

$$\int_0^2 f dx = \frac{8}{3} \text{. ב. } \overline{\int_0^2} f = \underline{\int_0^2} f = \frac{8}{3} \text{. א. (2)}$$

3) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{. ב. (4)}$$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוספת באנגלית

שאלות

1) תהי $\mathbb{R} \rightarrow [0,2]$: f מוגדרת על ידי $x^2 = f(x)$.
מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאימים לחוקת הקטע $-n$ תת-קטועים בעלי אורך שווה, כאשר $n = 6, 8, 10, 20$.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- הגידרו את המושג עידון של חלוקה.
- הוכחו את המשפט הבא :
תהי $\mathbb{R} \rightarrow [a,b]$: f פונקציה חסומה ויהיו P ו- Q שתי חלוקות של הקטע, כך ש- Q עידון של P , אז $L(Q,f) \leq U(Q,P) \leq U(Q,f)$.
- הוכחו את המסקנה הבאה מהמשפט :

$$\cdot \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx, \text{ או } f \text{ פונקציה חסומה, אז}$$

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- הוכחו את קרייטריון רימן לאינטגרביליות.
כלומר, הוכחו את המשפט הבא :
פונקציה חסומה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם לכל $0 < \varepsilon < U(P,f) - L(P,f)$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$, כך ש- $\sum_{i=1}^{n-1} U(P_i, f) - L(P_i, f) < \varepsilon$.
- הוכחו את המסקנה מהמשפט לעיל :
תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$, ונניח כי (P_n) היא סדרה של חלוקות של הקטע $[a,b]$, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) - L(P_n, f) = 0$.
הוכחו ש- f אינטגרבילית.

$$\cdot f(x) = \begin{cases} x & x = 1/n \\ 0 & x \neq 1/n \end{cases} \text{ מוגדרת על ידי}$$

הוכחו כי f אינטגרבילית ומצאו את $\int_0^1 f(x)dx$.

4) הוכחו את המשפטים הבאים :

- פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.
- פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

5) סדרת פונקציות $f_n(x) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי: $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

$$\text{הוכחו כי } 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

6) תהי פונקציה $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- x רציונלי, $f(x) = 0$ לכל x אי-רציונלי.

העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של f , והראו כי f אינה אינטגרבילית.

7) תהי $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{כאשר } x = \frac{p}{q}, \text{ כאשר } p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול- } p, q \text{ אינ גורמים משותפים} \\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x = 1 \end{cases}$$

א. תהי A_N מוגדרת באופן הבא, לכל $N \in \mathbb{N}$: $A_N = \left\{ x \in (0,1) \mid x = \frac{p}{q} \text{ ו- } q \leq N, p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול- } p, q \text{ אינ גורמים משותפים}. \right\}$
הראו שהקבוצה A_N סופית.

ב. ל- $N \in \mathbb{N}$ ו- $\epsilon > 0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים

$$[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2m-1}, x_{2m}]$$

$$, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} < 1$$

$$, A_N \subseteq (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) \cup \dots \cup (x_{2m-1}, x_{2m})$$

$$.\left| x_1 - x_2 \right| + \left| x_3 - x_4 \right| + \dots + \left| x_{2m-1} - x_{2m} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

ג. הראו ש- f אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, g ו- h ב- $[0,1]$, כך שההרכבה $h \circ g$ אינה אינטגרבילית.

8) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d] \subseteq [a,b]$.

הראו ש- f אינטגרבילית ב- $[c,d]$.

9) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f חסומה ב- $[c,d]$, ונתנו :

$$M = \sup\{f(x) | x \in [c,d]\}, M' = \sup\{|f(x)| | x \in [c,d]\}$$

$$m = \inf\{f(x) | x \in [c,d]\}, m' = \inf\{|f(x)| | x \in [c,d]\}$$

הוכחו כי $m - m' \leq M - M'$.

ב. תהי $\mathbb{R} \rightarrow [a,b] : f$ אינטגרבילית.

הוכחו כי $|f|^2$ אינטגרבילית.

10) תהיינה f ו- g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

א. הוכחו כי אם $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ לכל $x \in [a,b]$ אז $f(x) \leq g(x)$ לכל

ב. הוכחו כי $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

ג. הוכחו כי אם $m \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a,b]$ אז $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

11) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (כלומר, $f(x) \geq 0$).

א. הוכחו כי אם f רציפה וכן $\int_a^b f(x) dx = 0$, אז f לכל

ב. הביאו דוגמה לפונקציה f אינטגרבילית ב- $[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x) dx = 0$, כאשר

אבל קיים $x_0 \in [a,b]$, עבורו $0 < f(x_0) < \epsilon$.

הערה : f לא תהיה רציפה.

12) תהי $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c \in (0,1)$, הפונקציה f אינטגרבילית ב- $[c,1]$.

א. הוכחו כי f אינטגרבילית ב- $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \in (0,1] \end{cases}$$

אינטגרבילית ב- $[0,1]$.

13) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
 נניח שכאשר המכפלה fg אינטגרבילית ב- $[a, b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית
 כלשהי g , מתקיים $\int_a^b (fg)(x) dx = 0$.
 הוכיחו כי 0 (כלומר, $f(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$)

14) ענו על הסעיפים הבאים :

א. יהיו $x, y \geq 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} = \max \{x, y\}$$

ב. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right) = \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$$

15) [אי-שוויון קושי-שווורץ]

א. יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

רמז : $t \in \mathbb{R}$ לכל $\sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2 \geq 0$

ב. תהיינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

רמז : $t \in \mathbb{R}$ לכל $\int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0$

16) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של f במספר סופי של נקודות.
 הוכיחו שהפונקציה שמתකבלת אינטגרבילית.

17) סעיף א'

$$1. \text{ הוכיחו כי } b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a + \dots + b^{n-2} + a^{n-1})$$

כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$2. \text{ הוכיחו כי } k, n \in \mathbb{Z}^+, k^n < \frac{(k+1)^{n+1} - k^{n+1}}{n+1} < (k+1)^n.$$

$$3. \text{ הוכיחו כי } \sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n$$

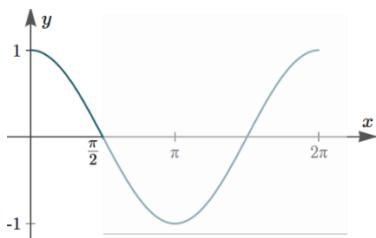
$$\text{כלומר, } 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n + m^n,$$

סעיף ב'

תהי $f(x) = x^n$ מוגדרת בתחום $[0, 1]$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי f אינטגרבילית ב- $[0, 1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x) dx$.

רמז: חלקו את הקטע $[0, 1]$ ל- m קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



$$18) \text{ תהי } f(x) = \cos x \text{ מוגדרת ב- } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ כאשר } n \in \mathbb{N}.$$

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- f אינטגרבילית

$$\cdot \int_0^{\pi/2} f(x) dx, \text{ וחשבו את } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{רמז 1: חלקו את } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ל- } n \text{ קטעים שווים, והניחו כי } n \rightarrow \infty.$$

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $\theta \in \mathbb{R}$ ו- $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin \frac{(2k-1)\theta}{2} \right]$$

$$\cdot \sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

$$19) \text{ חשבו את } \int_1^2 f(x) dx, \text{ בעזרת חלוקה}$$

כאשר $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$ ($0 \leq i \leq n$), ו גם:

$$P_4 = \left\{ 1, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{4}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2 \right\} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{א.}$$

20) תהינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$. הוכיחו:

- א. אם $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ לכל $x \in [a, b]$, אז $f(x) \leq g(x)$
- ב. אם $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ לכל $x \in [a, b]$, אז $m \leq f(x) \leq M$

21) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי \sqrt{f} אף היא אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

22) נתונה הפונקציה $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

- ב. אם f רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $0 < \int_a^b f(x)dx > 0$

ג. אם f אינטגרבילית, אז כך גם f^2 .

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם f .

23) חשבו את $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$, כאשר $\int_{0.25}^{4.3} \lfloor x \rfloor dx$
(פונקציית הערך השלים).

24) הוכיחו כי אם f אינטגרבילית ב- $[a, b]$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ אז αf אינטגרבילית ב- $[a, b]$, וכן $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

רמז: הניחו תחילת כי $\alpha \geq 0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל- $\alpha < 0$.

25) הוכיחו כי אם f, g אינטגרביליות ב- $[a, b]$, אז כך גם $f + g$

$$\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

רמז: הוכיחו כי $\int_a^b (f + g)dx \geq \underline{\int_a^b f(x)dx} + \underline{\int_a^b g(x)dx}$ ו- $\overline{\int_a^b (f + g)dx} \leq \overline{\int_a^b f(x)dx} + \overline{\int_a^b g(x)dx}$

26) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן קיימים $c > 0, d < c$ כך ש-

לכל $x \in [a, b]$ $\frac{1}{f(x)}$ אינטגרבילית ואניינה אפס ; חסומה

הוכיחו כי גם $\frac{1}{f(x)}$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

27) נתיח כי f, g אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

א. הוכיחו כי גם $f \cdot g$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

ב. הוכיחו כי אם $\int_a^b |g(x)| dx > c > 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

28) הנתיח כי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ וכן $a < c < b$, והוכיח כי :

א. אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a,c]$ ו- $[c,b]$.

ב. אם f אינטגרבילית ב- $[a,c]$ ו- $[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בעקבות א' ו-ב', מתקיימים השווין :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

29) נתיח כי f, g אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

נגידיר $\psi = \min\{f, g\}$ וכן $\varphi = \max\{f, g\}$.

הוכיחו כי גם ψ, φ אינטגרביליות ב- $[a,b]$.

$$\text{רמז : } ? = \min\{a, b\}, \max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a+b+|a-b|]$$

30) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהתנחת החלוקה $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon > 0$

נגידיר שתי תת-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו- $B_\varepsilon(P)$, באופן הבא :

$$\text{. } M_i - m_i \geq \varepsilon \text{ אם } i \in B_\varepsilon(P) \text{ ו- } M_i - m_i < \varepsilon \text{ אם } i \in A_\varepsilon(P)$$

$$\text{כמו כן, נגידיר } s_\varepsilon(P) = \sum_{i \in B_\varepsilon(P)} \Delta x_i$$

הוכיחו כי פונקציה חסומה f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ אם ורק אם

לכל $0 < \varepsilon$ ולכל $0 < \delta$ קיימים ζ שלכל P כניל' $\zeta < \delta \Rightarrow s_\varepsilon(P) < \varepsilon$.

31) נתיח כי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהי $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

א. האם תמיד ניתן לבחור תגיות $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ ל- P ,

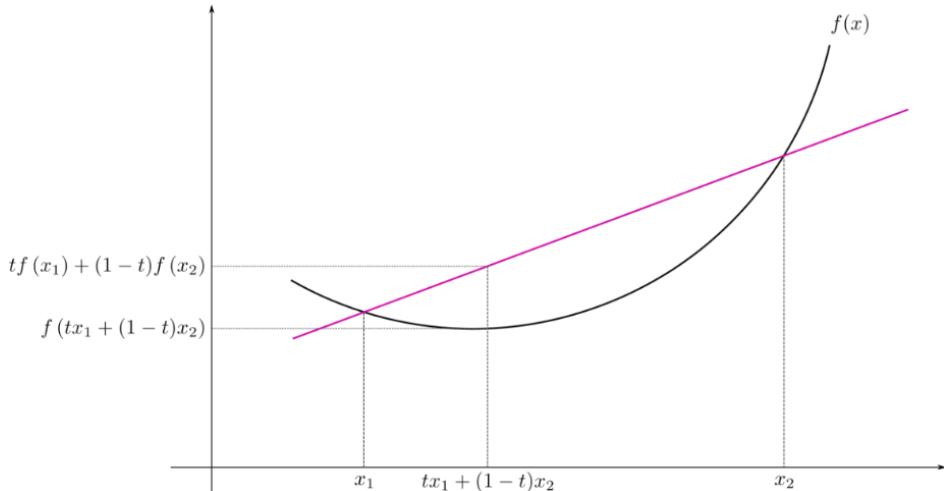
$$\text{כך ש- } S(f; P, C) = L(f, P) ? \text{ נמקו.}$$

הערה : ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1} < c_i < x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם יניתן גם כי f רציפה?

32) זכרו כי פונקציה f על קטע I תיקרא קמורה, אם לכל $a, b \in I$, ולכל $t \in [0,1]$

$$\cdot f(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \leq t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$$



א. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, מתקיים אי-השוויון

$$\cdot f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i)$$

ב. (אי-שוויון ינגש)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

$$\cdot f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx$$

33) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

א. הוכיחו כי f אי-זוגית אם ורק אם F זוגית.

ב. הוכיחו כי f זוגית אם ורק אם F אי-זוגית.

34) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

א. הוכיחו כי אם F מחזורית, אז גם f מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה f מחזורית אבל F לא-מחזורית.

35) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית.

$$\cdot \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx, \text{ כך ש-} \forall c \in [a,b]$$

36) תהי A קבוצת כל הפונקציות $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f , שהן אינטגרביליות בכל $[a, b]$,

$$\boxed{\int_0^x f(t)dt = f(x) - 1 : x \in \mathbb{R}}$$

א. מצאו דוגמה לפונקציה ב- A .

ב. הוכיחו כי אם $f \in A$, אז f גזירה ב- \mathbb{R} .

(רמז: תחילת הראו ש- f רציפה).

ג. מצאו את כל הפונקציות f ב- A .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 23 - שימושי האינטגרל המסוים (שטח-אורך קשת)

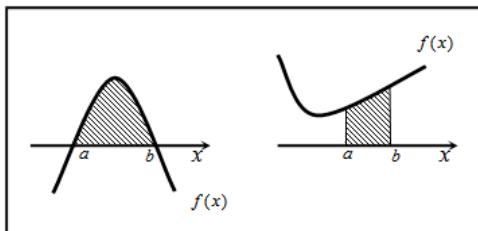
תוכן העניינים

246	1. חישוב שטחים
266	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה- y
267	3. אורך קשת

чисוב שטחים

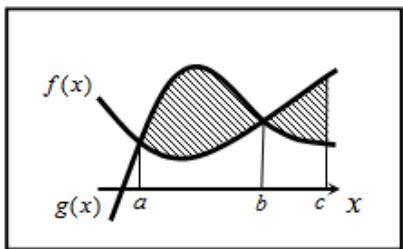
чисוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



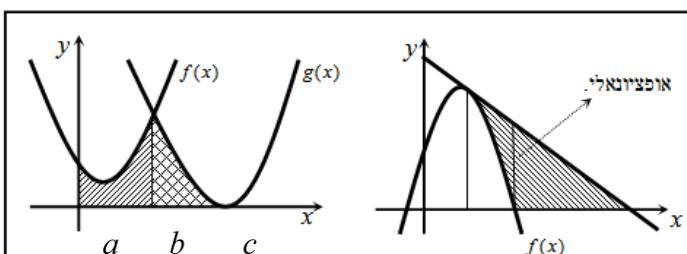
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולה מעל השני:

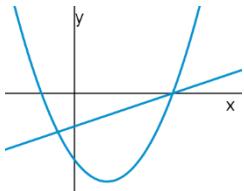


$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ S_2 &= \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \\ S &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

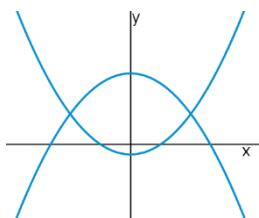
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



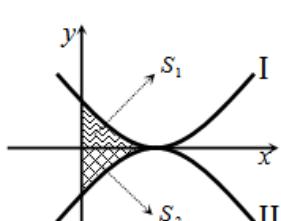
$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

שאלות

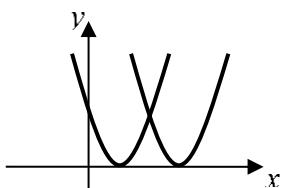
- 1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



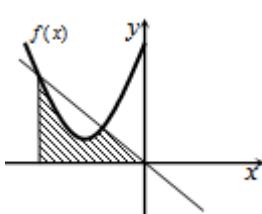
- 2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



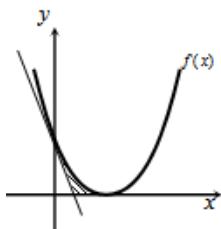
- 3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
 כמפורט באירור.
 א. התאימו בין הפונקציות לgrafים I ו-II.
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
 ב- S_1 ו- S_2 , כמפורט באירור.
 הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



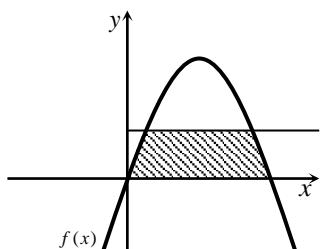
- 4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



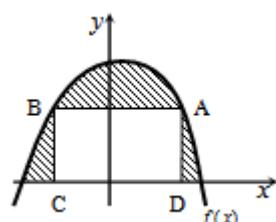
- 5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
 בנקודת שבה $x = -4$, כמפורט באירור.
 א. מצאו את משוואת הישר.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



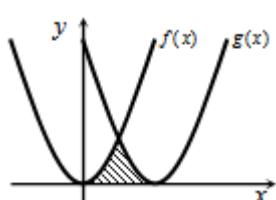
- 6) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
 בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.
 א. מצאו את משוואת המשיק.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



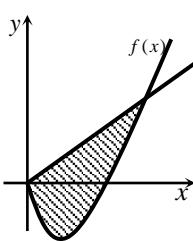
- 7) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
 הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $9=x$.
 א. מצאו את ערך הפרמטר k .
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתווארת באיוור שלහלן,
 היא $y = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $6 =$
 חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B .
 מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,
 כך שנוצר מלבן $ABCD$.
 ידוע שהשיעור ה- x של הנקודה A הוא $4=x$.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).

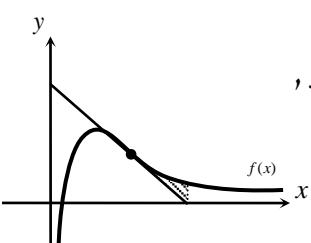


- 9) באיוור שלහלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$
 את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודת שבה $x=2$.
 הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).

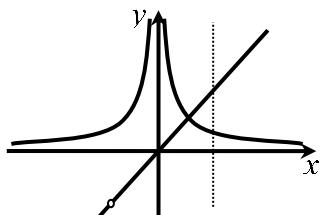


- . 10) באյור שלහלן מתוארים גראף הפונקציה $f(x)$ והישר x . $y = 2x$ נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$.
 וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודת שבה ערך ה- $y = 16$ הוא $x = 8$.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

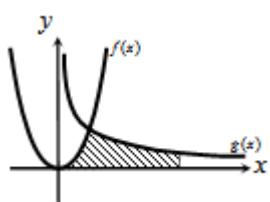
- ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה והישר.



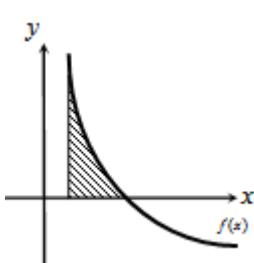
- . 11) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.
 ב. באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצוות בסעיף א'.
 חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x , היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .



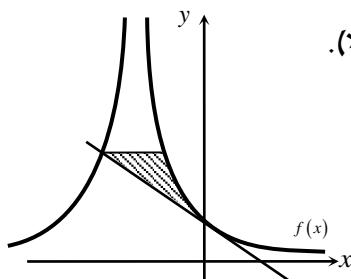
- . 12) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+2}$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x = 2$ וציר ה- x .



- . 13) באյור שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (a קבוע), בתחום $x > 0$.
 ידוע כי הגרפים נחתכים ברגע הראשון, בנקודת הנמצאת על הישר $y = 4x$.
 א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .
 ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $y = 4x$.

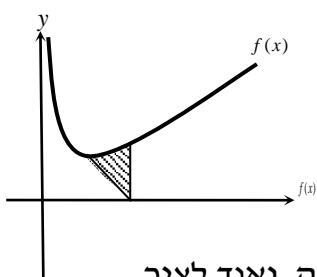


- . 14) גראף הפונקציה $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע) חותך את ציר ה- x בנקודת $(6,0)$.
 א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
 ב. חשבו את השטח המוגבל בין גראף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = 2$.

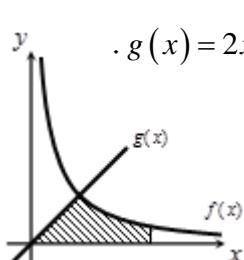


- 15) נתונה הפונקציה A) $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ פרמטר חיובי. ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- y , הוא $-\frac{1}{9}$.
א. מצאו את ערך הפרמטר A .

- ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- y .
ג. הראו כי המשיק חותך את גраф הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.
ד. העבירו ישר אופקי מנקודות החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, וממצו את נקודות החיתוך הנוספת של ישר זה עם גраф הפונקציה.
ה. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, היישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיוור).

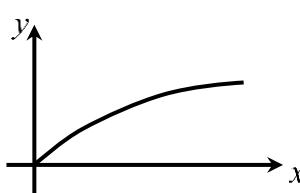


- 16) באיוור שלහן נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.
א. מצאו את נקודות המינימום שלה.
ב. מנקודות המינימום של הפונקציה נعبر ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- x .
מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- x , היוצא מנקודה $(2,0)$ עד לנקודות החיתוך עם גרף הפונקציה.



- 17) באיוור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x) = 2x$ ו- $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.
א. מצאו את נקודות החיתוך של הגрафים.
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגрафים, ציר ה- x והישר $x = 9$.

- 18) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודות המינימום שלה וציר ה- y .



- 19) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ בריבוע הראשון. לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.

20) באյור שלහן מתואר גраф הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

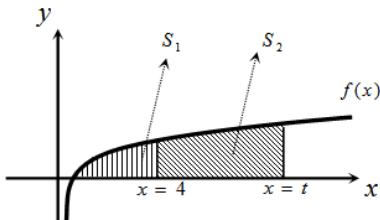
נעביר שני אנקים לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = t$ (כאשר $t > 4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,

ואת השטח הכלוא בין גраф הפונקציה, ציר ה- x והאנקים ב- S_2 .

ידעו כי $S_2 = 8S_1$.

מצאו את t .



21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$

א. ענו על השעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה שיפועו הוא $\frac{17}{16} m$.

מצאו את נקודת ההשקה.

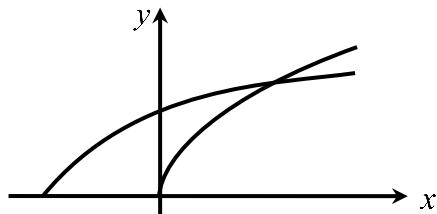
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה, ציר ה- x ואנק לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצויה בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, כאשר ($b > 0$)

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

ציר ה- x הוא $\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .



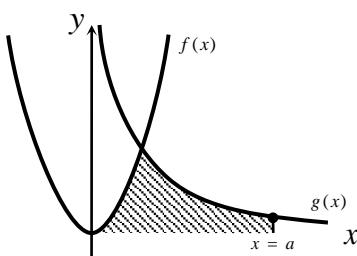
23) באյור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$

בריבוע הראשון.

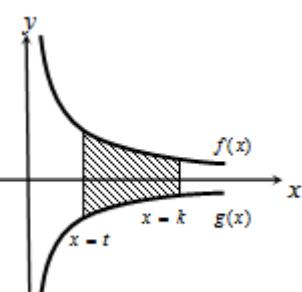
נעביר ישר $x = a$, החותך את גраф הפונקציה $g(x)$ ויצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידעו כי שטח זה שווה ל- $S = \frac{1}{3} 85$.

מצאו את a .



24) באIOR שלහן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $x = t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות

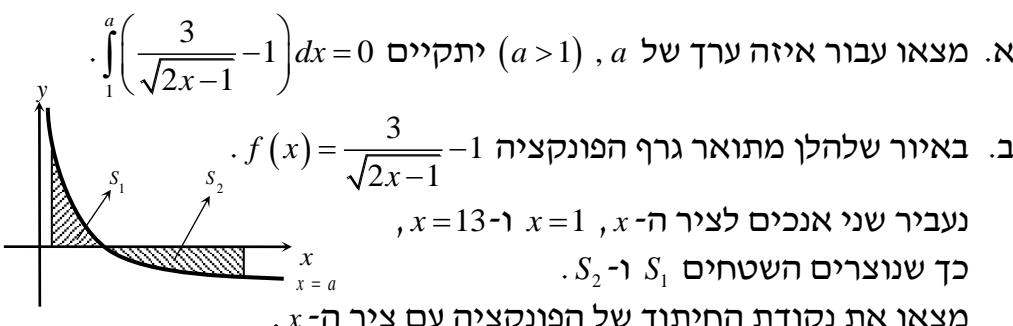


ונוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x = t$ ו- $x = k$ הוא $S = 12$. מצאו את t .

25) ענו על הטעיפים הבאים:



א. מצאו עבור איזה ערך של a יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.

ב. באIOR שלහן מתואר גраф הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$,

ונביר שני אנכים לציר ה- x , $x=1$ ו- $x=13$.

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

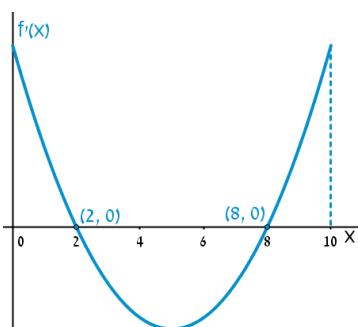
ג. ענו על תתי-הטעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x=1$, כולל את S_1 .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו כמה שווה השטח S_2 .

נקו.



26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$

בצירוף מתואר גראף הנגזרת $f'(x)$.

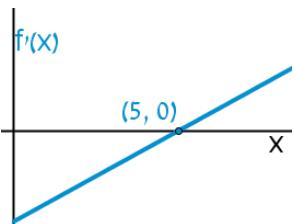
א. שרטטו סקיצה של גראף הפונקציה $f(x)$,

אם $f(5)=0$, $f(0)=-4$, $f(2)=6$

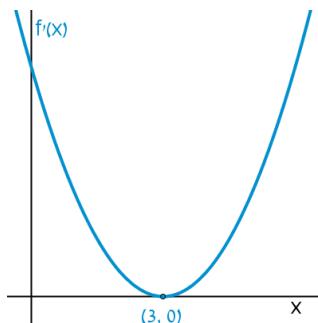
ובן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל עליי גראף הנגזרת והצירים

בריבוע הראשון, עד לנקודת שבה $x=2$.

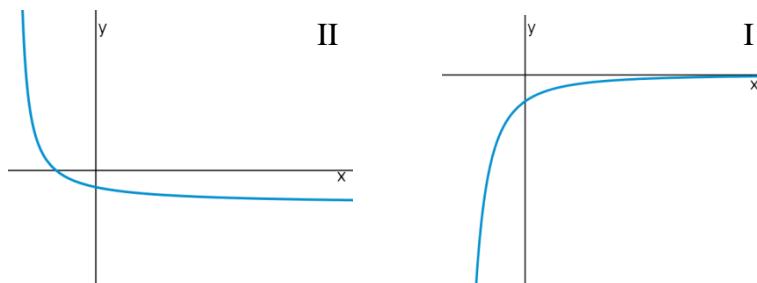


- 27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.
- מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.
 - קבעו מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 - כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y שלו הוא -2 .
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.
 - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



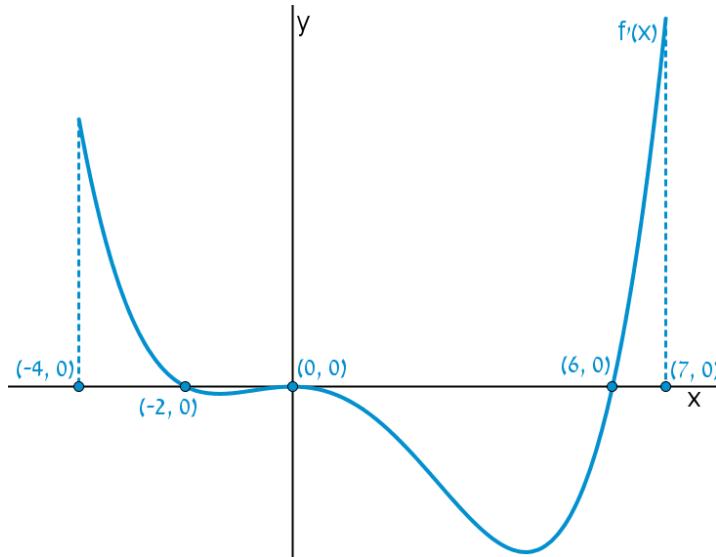
- 28) באIOR שלහלן מתוארכות הנגזרת $f'(x)$.
- האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.
 - חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בריבוע הראשון.

29) באIORים שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



- זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.
- נתון $f(10) = -3$, וכי $f'(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$. מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$

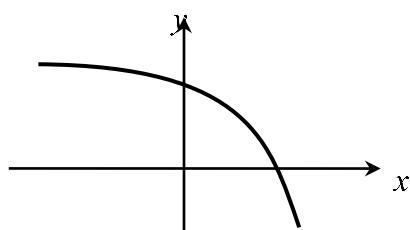


- א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$,
 לפי הנתונים $f(-2) = 7.6$, $f(0) = -2$, $f(6) = -606.8$.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- x בריבוע השלישי.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת לציר ה- x בריבוע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

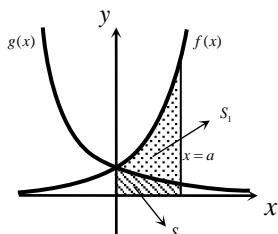
אינטגרלים יסודים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



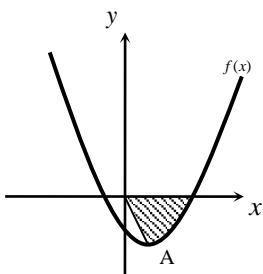
31) נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששייפוע $-e$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין
 הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

32) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $0 < b$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
 וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצאו את ערכו של הפרמטר b .

33) נתונות הפונקציות $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ו- $g(x) = e^{-x}$.
 מנוקודה הנמצאת על גרף הפונקציה (x, g) בربع הראשון הורידו אנך לשני
 הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,
 ומנקודות החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן.
 הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



34) באIOR שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
 נעביר אנך לציר ה- x את הישר $a = x$,
 כאשר $0 < a$, כמתואר באIOR.
 אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
 ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
 מצאו את a .



$$. \quad f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$$

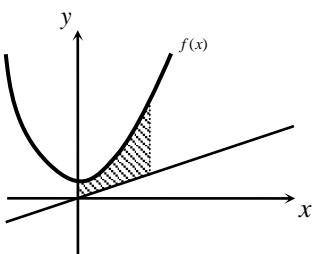
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A .

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את המשוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הרأسית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.



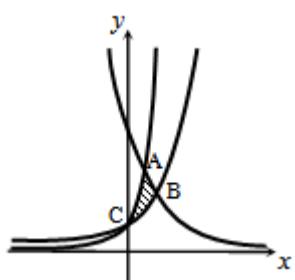
$$. \quad f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$$

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1, \frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באյור שלහלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x=2$.



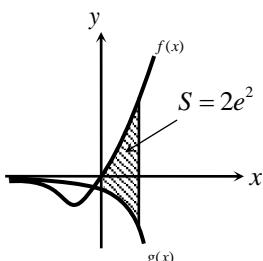
73) באյור שלහלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$h(x) = 2^{4-2x} \quad g(x) = 4^x \cdot 2 \quad f(x) = 2^x \cdot 1$$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A , B ו- C (נקודות החיתוך בין הגрафים).

ג. חשבו את השטח המסומן באյור.



83) ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = xe^x$ ו- $g(x) = -e^x$.

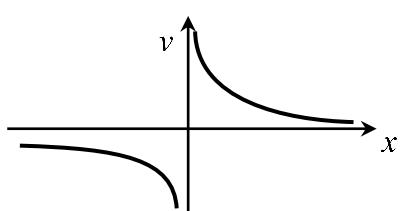
נעביר ישר $y = a$, כאשר $a > 0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקומו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.
מצאו את a .

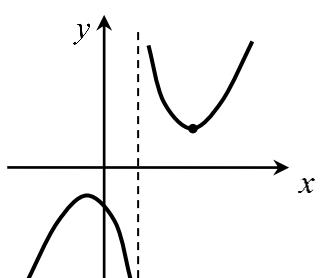
פונקציות לוגרิตמיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריטמיות

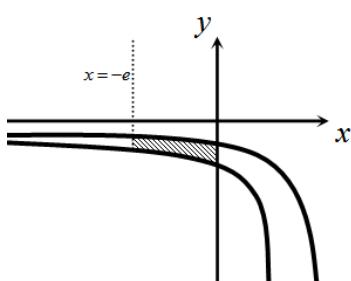
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$



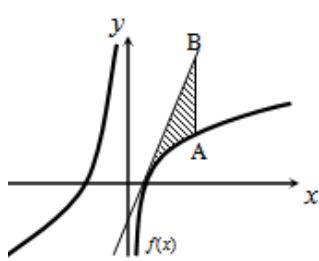
39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישירים $x = -4$ ו- $x = -1$, וציר ה- x .
 ניתן להשאיר \ln בתשובה.



40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין גורף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה.
 אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.



41) באIOR שלහן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$ ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.
 ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודת שבה $x = 3$.
 א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
 ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



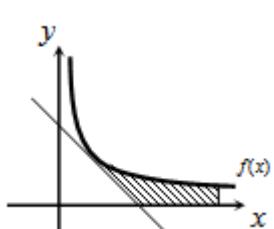
42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משווהת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משווהת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודה החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



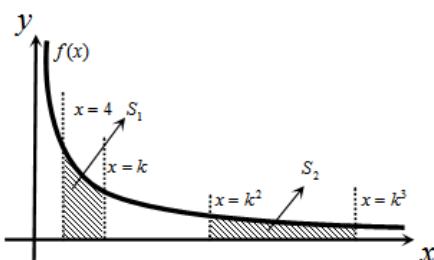
43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משווהת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבת $x = 2$ היא $y = 4 - x$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. באյור שלහלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.

חסבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



44) באյור שלහלן נתונה הפונקציה

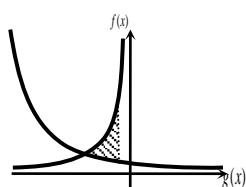
$$f(x) = \frac{2}{x}, \text{ בתחום } x > 0.$$

נעביר את הישירים $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ ו- $x = 4$, כמתואר באյור ($x > 4$).

א. הבינו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

ב. הראו כי ההפרש $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k , וחסבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 .
מצאו את k .

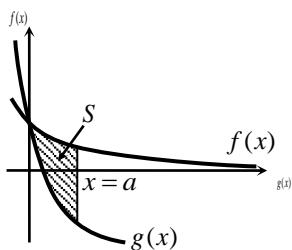


45) נתונות הפונקציות $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ ו- $f(x) = -\frac{4}{x}$

גרף $(x) g$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבת 4.
א. מצאו את הפונקציה $(x) g$.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



46) באյור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x}) \quad f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

בתחום $0 \geq x$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. נعتبر ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך

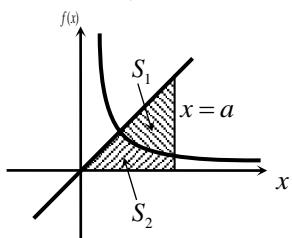
לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי

הfonקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצאו את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

47) באյור שלහן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $x = a$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, בربיע הראשון.



נعتبر אנכ' לציר ה- x , $x = a$, הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצויה בסעיף הקודם.

האנ' חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 , המתוארים באյור.

ב. מצאו את הערך של a , עבורו השטח S_2

$$\text{יהיה שווה ל- } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$$

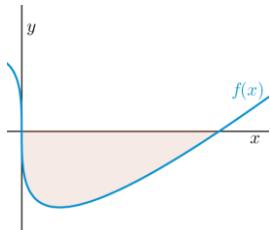
ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

אינטגרלים מיידים של פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m+1}{n}}}{\frac{m+1}{n}} + C$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m+1}{n}}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + C$

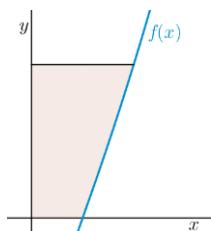
תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.



. 48) באIOR שלහלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והציר.



. 49) באIOR שלහלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

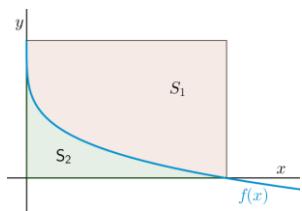
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. נעביר אנך לציר ה- y מנקודה (4,6).

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והציר,

בריבוע הראשון.

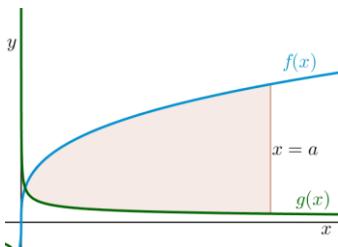


. 50) באIOR שלහלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - 4\sqrt[3]{x}$

נעביר אנכים לצירים מנוקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבדו,

ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והציר ב- S_1 , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והציר ב- S_2 .

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51) באյור שלහלן מתוארים גרפים של הפונקציות

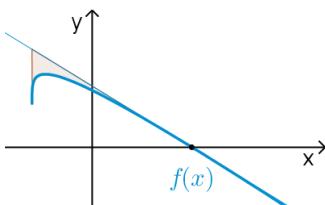
$$\cdot g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ ו- } f(x) = 4\sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $0 < x$.

ב. נعتبر אנך לציר ה- x , $x = a$ (a פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנוקדת החיתוך שלהם ועד לאנך,

$$\text{הוא } 42 \frac{3}{16} \text{ יח"ש.}$$

מצאו את a .



52) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, a פרמטר.

ידוע כי גраф הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודת שבה $x = 2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

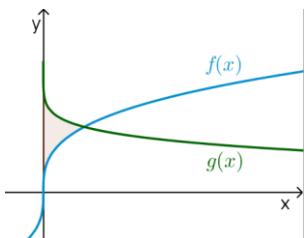
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באյור שלහלן מתואר גраф הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גраф הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

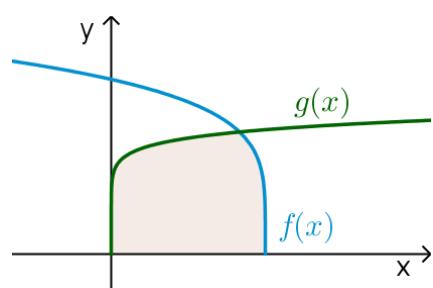


53) באյור שלහלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$\cdot f(x) = 2 - \sqrt[6]{x} \text{ ו- } g(x) = \sqrt[3]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

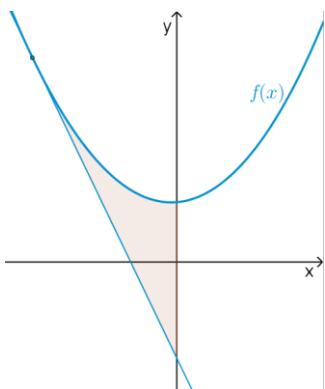


54) הנזורה של $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודת שבה $x = 1.2$.

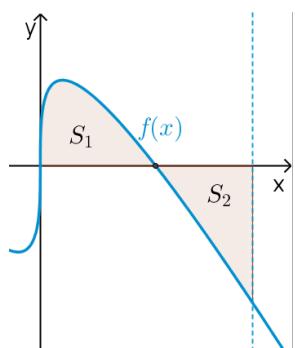
א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גראף הפונקציה $f(x)$, גראף הפונקציה $g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .



55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.

- מצאו את משועצת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
- חשבו את השטח הכלוא בין גורף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- באזור שלhalten מתוואר גורף הפונקציה בריבוע הראשון. השטח הכלוא בין גורף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
נעביר ישר $x = k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיזור.
מצאו את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

. 1. $57\frac{1}{6}$ יחס'.

. 2. $21\frac{1}{3}$ יחס'.

ב. שאלת הוכחה.

$$g(x) = \Pi, f(x) = I. \quad \text{3}$$

. 4. $\frac{2}{3}$ יחס'.

ג. $7\frac{5}{6}$. ב. $(-3,3)$. א. $y = -x$ (5)

ג. $\frac{2}{3}$. ב. $(1,0)$. א. $y = -4x + 4$ (6)

ג. $81\frac{1}{3}$. ב. $(1,9)$. א. $k = 10$ (7)

ב. $27\frac{1}{6}$. ב. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$. א. (8)

ב. $5\frac{1}{3}$. ב. $g(x) = (x-4)^2$. א. (9)

ג. $85\frac{1}{3}$. ב. $(0,0)$. ב. $f(x) = x^2 - 6x$. א. (10)

ב. $\frac{1}{8}$. ב. $y = -x + 2$. א. (11)

. 12. 1 יחס'.

ב. $13\frac{1}{3}$. ב. $(2,8)$, $a = 32$. א. (13)

ב. 8 יחס'. ב. $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$, $a = 36$. א. (14)

ה. $\frac{5}{8}$. ה. $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$. ג. הוכחה. ד. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$. ב. $A = 6$. א. (15)

ב. 1.75 יחס'. א. $\min(0.5, 1.5)$. (16)

ב. 48 יחס'. א. $(4, 8)$. (17)

. 18. 2.26 יחס'.

. 19. 0.5 יחס'.

$t = 16$ (20)

. 21. ב. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$. iii. ב. $(16, 14)$. ג. 88 יחס'.

. ii. $(4, 0)$. א. $x > 0$. i. (21)

$b = 2$ (22)

$a = 9$ (23)

(24) א. שאלת הוכחה. $t=1$ ב.

. $S_2 = |-S_1| = 2 \cdot ii$ $S_1 = 2 \cdot g.i.$ (5,0) א. (25) $a=13$

ב. 10 יחס'ש.

(27) א. חיובית: $x < 5$, שלילית: $x > 5$. ב. עולה: $x < 5$, יורדת: $x > 5$.

ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יחס'ש. ג. $\min(5, -2)$

(28) א. לא. הנקודה (3,0) היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יחס'ש.

ב. 1 יחס'ש. א. (29) $f(x): II, f'(x): I$

. ג. 604.8 ב. 9.6 א. שאלת הוכחה. (30)

ג. 1 יחס'ש. א. (31) $S = 0.192$

ב. 2 (32)

(33) שאלת הוכחה.

א. (34) $a = \ln 2$

. ג. $S = 4.744$ ב. $y = -(e+2)x$ א. (35) $A(1, -e-2)$

. ב. 1.52 א. (36) $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}, a = -2$

. ג. $S = 1.03$ ב. $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$ א. (37)

ב. $a = 2$ א. (38) $y' = xe^x$

ג. יחס'ש. א. (39) $S = \ln 4$

. ג. יחס'ש. א. (40) $S = 4 \ln 2 - 2$

. ב. $S = 1.76$ א. (41) $f(x) = \frac{2}{x-1}, g(x) = \frac{1}{x-2}, a = 2$

. ב. $x = 2$ א. (42) $f(x) = 7 + 2x - \frac{4}{x}, a = 2, b = -4$

ג. $S = 6 + \ln 256 \approx 11.54$ יחס'ש.

. ב. $S = 6 - 4 \ln 2$ א. (43) $f(x) = \frac{4}{x}$

. ג. $k = 8$ ב. $S_2 - S_1 = \ln 16$ א. (44) $S_1 = 2 \ln k - \ln 16, S_2 = 2 \ln k$

. ג. $S = \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674$ ב. $(-2, 2)$ א. (45) $g(x) = \frac{2}{2x+5}$

ב. $a = 2$ (46)

. ג. $\frac{S_1}{S_2} = 5.955$ ב. $a = 5$ א. (47) $(1, 1)$

. ב. $S = 16$ א. (48) $(0, 0), (8, 0)$

. ג. $S = 18.149$ ב. $(2, 0)$ א. (49) $x > 0$

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a=8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2 \right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ט.}$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad (1,1) \quad \text{א.} \quad (53)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad .x \quad \text{א. כל} \quad (56)$$

чисוב שטחים ביחס לציר ה- y

שאלות

1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $x = 8 - y$.

תשובות סופיות

$$20\frac{5}{6} \quad (1)$$

$$20\frac{5}{6} \quad (2)$$

אורקשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון :

$$(1 \leq x \leq 8), \quad y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(1 \leq x \leq 8), \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq x \leq 3), \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = \ln x \quad (8)$$

$$(0 \leq y \leq 4), \quad x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), \quad y = x^2 \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} 3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \left\{ 82^{1.5} - 1 \right\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 24 - שימושי האינטגרל המסוים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

268	1. חישוב נפח גוף-סיבוב
271	2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב
272	3. חישוב נפח גוף כללי

חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 1 - 2x$ מסתובב סביב ציר ה- x .

חשבו את נפח הגוף המתתקבל בשתי דרכים:

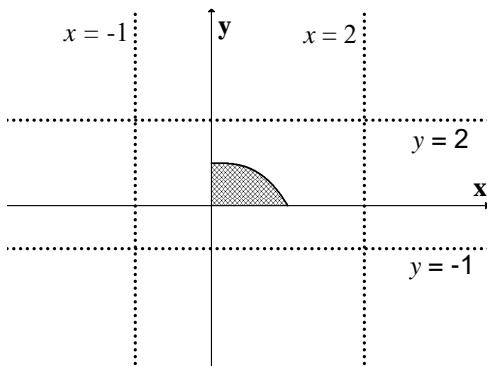
- א. שיטת הדיסקאות (cavalieri).
- ב. שיטת הקלייפות בגליליות.

2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = 1 - 2x$ מסתובב סביב ציר ה- y .

חשבו את נפח הגוף המתתקבל בשתי דרכים:

- א. שיטת הדיסקאות (cavalieri).
- ב. שיטת הקלייפות בגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 1 - x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר קלשחו.
מצאו את נפח הגוף המתתקבל בכלל מקרה בשאלות 3-8:



3) ציר ה- x .

4) הישר $y = -1$.

5) הישר $y = 2$.

6) ציר ה- y .

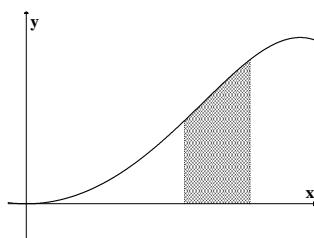
7) הישר $x = -1$.

8) הישר $x = 2$.

9) נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

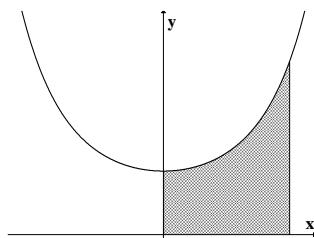
10) נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

11) נחו ווכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.



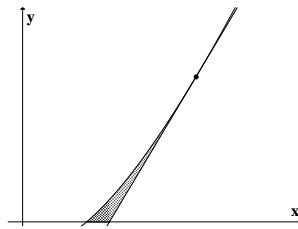
12) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = \sin(x^2)$

והישרים $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $y = 0$
מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו נפח הגוף המתתקבל?



13) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = e^{x^2}$

והישרים $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$
מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו נפח הגוף המתתקבל?



14) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x \ln x$

, המשיק לגרף בנקודה (e, e) וציר ה- x .
מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו נפח הגוף המתתקבל?

15) השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 8$, $x = 0$

מסתובב סביב הישר $x = 4$.

מצאו את נפח הגוף הסיבוב שמתתקבל.

תשובות סופיות

$$\frac{64}{15}\pi \text{ ב. } \quad \frac{64}{15}\pi \text{ א. } \mathbf{(1)}$$

$$\frac{8}{3}\pi \text{ ב. } \quad \frac{8}{3}\pi \text{ א. } \mathbf{(2)}$$

$$\frac{9\pi}{14} \mathbf{(3)}$$

$$\frac{15\pi}{7} \mathbf{(4)}$$

$$\frac{33\pi}{14} \mathbf{(5)}$$

$$\frac{3\pi}{5} \mathbf{(6)}$$

$$2.1\pi \mathbf{(7)}$$

$$\frac{12\pi}{5} \mathbf{(8)}$$

$$V = \pi R^2 \cdot H \mathbf{(9)}$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \mathbf{(10)}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{(11)}$$

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1) \mathbf{(12)}$$

$$\pi(e-1) \mathbf{(13)}$$

$$\frac{e^3-4}{54}\pi \mathbf{(14)}$$

$$128\pi \mathbf{(15)}$$

חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

שאלות

1) הפונקציה $y = \sqrt{4 - x^2}$, עבור $-1 \leq x \leq 1$, מסתובבת סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

2) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

3) נסחו והוכחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.

4) הפונקציה $x = \sqrt{9 - y^2}$, עבור $-3 \leq y \leq 3$, מסתובבת סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

תשובות סופיות

$$8\pi \quad (1)$$

$$S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2} \quad (2)$$

$$S = 4\pi R^2 \quad (3)$$

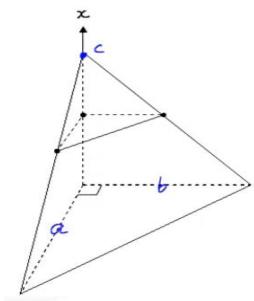
$$24\pi \quad (4)$$

чисוב נפח גוף כללי

שאלות

1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a .

2) חשבו את נפח של פירמידה, שבבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).



תשובות סופיות

$$V = \frac{a^2 h}{3} \quad (1)$$

$$\frac{abc}{6} \quad (2)$$

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 25 - המשפט היסודי של החדו"א (גזרת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב	273
2. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי תיאוריה	276
3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים	279

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכחו כי אם $f'(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אז:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^{x^2} e^{2t^2} dt}$$

11) חקרו את הפונקציה $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

12) נתונה הפונקציה $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$, כאשר $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$.
חשבו את $(g''(x))$ (הוכיחו כי f רציפה).

13) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נגידיך $x \in \mathbb{R}$ לכל $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$
הוכיחו כי $(g'(x)) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

14) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, וכי $\alpha \neq 0$.
נגידיך $x \in \mathbb{R}$ לכל $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$
הוכיחו כי $(g''(x)) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$

15) תהי f פונקציה רציפה וחיוונית לכל $x \geq 0$.
. $[0, \infty)$ מונוטונית יורדת בקטע $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$ הוכיחו כי הפונקציה

16) מצאו את $\int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt = \int_2^x f(t) dt + 2 \int_2^x \frac{1}{t-1} dt$, אם נתנו כי $\int_e^4 f(x) dx$

17) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, בנקודת 2π

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

$$I'(x) = e^{-x^2} \quad (3)$$

$$I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2 \quad (4)$$

$$I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x) \quad (5)$$

$$I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} \quad (8)$$

$$4e^{16} \quad (9)$$

$$0 \quad (10)$$

(11) תחומי הגדרה : כל x .

נקודות קיצון : אין קיצון, עולה לכל x .

$$\text{נקודות פיתול : } x = -1, 1, -\frac{3}{7}$$

. $-1 < x < -\frac{3}{7}$, $x > 1$ תחומי קמירות :

. $x < -1$, $-\frac{3}{7} < x < 1$ תחומי עיריות :

$$40 \quad (12)$$

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

$$14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e \quad (16)$$

$$y = x - 2\pi \quad (17)$$

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

שאלות

1) נתונה הפונקציה f המוגדרת בקטע $[0, 2]$ כך:

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $? F'(x) = f(x)$

2) נתונה הפונקציה f המוגדרת בקטע $[1, 1]$ כך:

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $? F'(x) = f(x)$

3) נגדיר $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

נגדיר $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

הוכיחו כי $F' = f$ ב- $[-1, 1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t)dt$ לא קיים.

האם הדבר עומדת בסתיויה למשפט היסודי של החדו"א?

4) נתונה פונקציה אינטגרבילית $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$

5) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b f(t) dt > 1$

הוכיחו שקיימים $x_1, x_2 \in (a, b)$, כך $\int_a^{x_1} f(t) dt = 1$, $\int_{x_2}^b f(t) dt = 1$.

6) תהי f פונקציה רציפה ומוחזורת לכל x , עם מחזור p .

הוכיחו שלaintגרל $\int_x^{x+p} f(t) dt$ יש את אותו הערך לכל $x \in \mathbb{R}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$ קבועה בקטע $(0, \infty)$

ומצאו את הקבוע המשני C עבורו מתקיים $f(x) = C$ לכל $x \in (0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ לכל $x > 0$.

8) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x) dx = 1$

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0, 1)$ כך $f(c) = 3c^2$.

9) תהי f פונקציה רציפה ב- $[-\pi/2, \pi/2]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t) dt = 0$

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0, \pi/2)$ כך $f(c) = 2 \cos 2c$.

10) תהי $f: [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c \in [0, \pi/4]$ כך $\int_0^{\pi/4} f(t) dt = f(c)$.

11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c \in (0, 1)$ כך $f'(c) = f(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$.

12) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$

הוכיחו כי $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

13) תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,

$$\int_a^{x_1} f(t) dt = \int_a^{x_2} f(t) dt$$

בקטע (a, b) , שקיימים מתקיים

א. הוכיחו כי קיים $c \in (a, b)$, כך ש- $f(c) = 0$.

ב. האם הטענה שבסעיף אי נכונה גם אם לא נדרש ש- f רציפה ב- $[a, b]$?

ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- f אינטגרבילית ב- $[a, b]$? נוכיח.

14) מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = e^{-|x|}$.

15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a, b]$,

$$\int_0^x f(t) dt$$

וనניח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$ (כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = 0$).

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. רציפה ולא גזירה.
 $F(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$.
 ד. לא.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x) = 0$ לכל x בקטע הנטוון. ג. רציפה וגזירה.
 ד. לא.

7) א. $C = 0$. ב. שאלת הוכחה.

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + D + 2 & x \geq 0 \\ e^x + D & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט הערך המומוצע לאינטגרלים

שאלות

1) בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך המומוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך המומוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך המומוצע של לגראנז'.

2) תהי f רציפה ב- $[a, b]$.
 $\int_a^b f(x)dx = 1 - \epsilon$.
 הוכיחו שקיימים פתרון למשוואה $(b-a)f(x) = 1 - \epsilon$.

3) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ונניח כי $x_1 < x_2 \leq b$.
 $\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$.
 הוכיחו שקיים $x \in (a, b)$ שubboרו $f(x) = 0$.

4) הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

5) תהי f פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n, n+1]$.
 $\int_n^{n+1} f(x)dx < f(n+1) < f(n)$.
 הוכיחו כי $f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x)dx < f(n)$.

6) יהיו $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.
 הוכיחו שקיים נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = g(c)$.

7) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.
 הוכיחו כי

8) תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

$$\text{נתון כי } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

$$\text{הוכיח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = a$$

9) חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x) = \sin x \sin(x + \alpha)$ בקטע $[0, 2\pi]$.

10) נזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

$$\text{אז קיימת נקודה } c \in (a, b) \text{ כך ש-}$$

הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

$$11) \text{ הוכח כי } \frac{3}{\ln 2} \leq \int_2^4 \frac{x}{\ln x} dx \leq \frac{6}{\ln 2}$$

$$12) \text{ הוכח כי } \frac{\pi^2}{9} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^2}{9}$$

$$13) \text{ הוכח כי } \frac{1}{2e} \ln 2 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx \leq \frac{1}{2} \ln 2$$

14) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

$$\text{הוכח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

15) נחו ווכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למעבדה רפואי

פרק 26 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא	(ללא ספר)
2. הפרדות משתנים.....	281
3. משוואה הומוגנית.....	283
4. משוואה מהצורה	$(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$
5. משוואה מדוקת.....	286
6. גורם אינטגרציה.....	288
7. משוואה לינארית מסדר ראשון	291
8. משוואת ברנולי	293
9. משוואת ריקטי	294
10. הצבות שונות ומשונות	295
11. משפט הקיום והיחidot על שם פיאנו ופיקارد	296
12. פתרונות גרפיים ונוומיים למשוואת מסדר ראשון	299
13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה	301

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2)=1 \quad ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1)=-1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi)=1 \quad ; \quad y'+y^2 \sin x=0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0)=5 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0)=1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t+c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - x dy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln \left| 2 \left(\frac{y}{x} \right)^3 + 1 \right| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) - 1 \right| - \frac{5}{4} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) + 3 \right| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) - \left(\frac{y}{x} \right) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 4 \right| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin \left(\frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

$$\ln \left(1 + e^{\left(\frac{x}{y} \right)^2} \right) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{x}{t} \right) - \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln \left(1 + 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right) + c \quad (9)$$

משואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואת מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6 :

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3 \right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2 \right)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

7) נתונה המשוואת $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$, כאשר k קבוע.

- א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k , על מנת שהמשוואת תהיה מדויקת?
- ב. פתרו את המשוואת עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y\sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin ydx + x\cos ydy = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x .

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0 \quad (5)$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0 \quad (6)$$

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (8)$$

$$y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4} \quad (9)$$

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 10) נתונה מדייר לא מדוקית

א. הוכחו: אם $e^{\int f(x)dx}$, אז $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$

ב. הוכחו: אם $e^{-\int g(y)dy}$, אז $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$

. $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$ 11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

. $(5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$ 12) נתונה המשוואה

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

. $(x^2 y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$ 14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא
פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה
 $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $y + x$ בלבד.

תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

(10) שאלת הוכחה.

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x + y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; \quad y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

הצבות שונות ומשונות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = \cos(y-x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); \quad y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, \quad y(0) = 1 \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

משפט הקיום והיחidot על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y(2) = -1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$

א. הוכחו ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + y$ הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיומם שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y(0) = 0$, $y' = \sqrt[3]{y} + 4$.

א. הוכחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכחו שלבעיה קיימים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y(4) = 0$, $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$

4) נתונה הבעיה $y(0) = 4$, $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $dy = (2x + y^3)dx$.

א. הראו שעבור $x = y$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,

ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,

מהן נקודות ההתחלה (x_0, y_0) , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,

העובד דרך (x_0, y_0) .

צטוואו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0, y_0) ?

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו 3 קירובי פיקارد לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $\infty \rightarrow n$.

7) כמה פתרונות יש בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \quad ? \quad (x > 0) \end{cases}$

8) נתונה בעיית התחלאה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלאה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

תשובות סופיות

- ב. שאלת הסבר.
ג. שאלת הוכחה.
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
ג. שאלת הוכחה.
- $y(x) = 0$
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
- א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחליה (x_0, y_0) , שverbora $\neq 0$.
- הקטע הארוך ביותר: $(0, \infty)$ או $(-\infty, 0)$.
- $y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + x^2, \quad y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, \quad y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$.
א. $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$
ב. הוכחה.
- א. אחד.
ב. $[0, 1]$
ג. הוכחה.
- א. $[-0.1, 0.1]$
ב. $[-0.08, 0.08]$
ג. הוכחה.
- א. $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
ב. $[-0.5, 0.5]$
ג. הוכחה.
- א. $(0, 1)$ הוכחה.
ב. $(1, 0)$ הוכחה.
ג. $(2, 0)$ הוכחה.

פתרונות גרפים ונומריים למשואה מסדר ראשון

שאלות

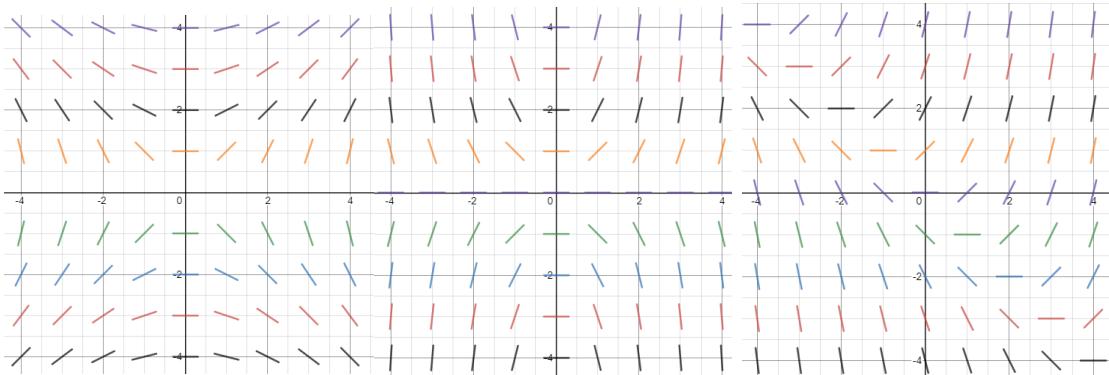
1) שרטטו שדה כיוונים למשואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א-ג' לשדה הכוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

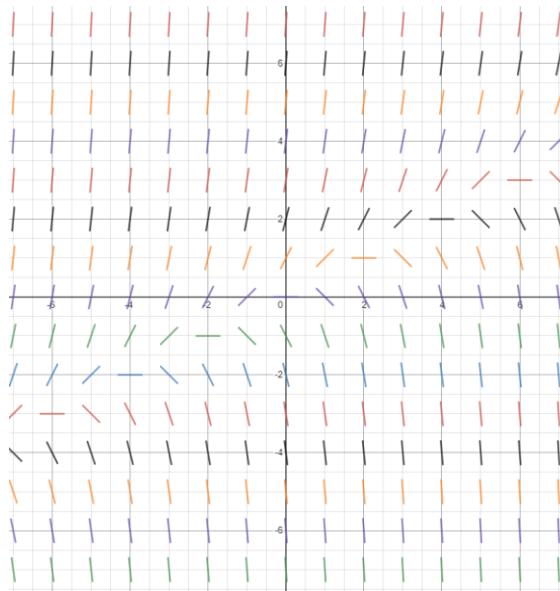
איור 1

3) נתונה המש"ר $y' = y - x$, $y(0) = 2$

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

4) נתונה המש"ר $y' = x + y$, $y(1) = 2$

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות**(1)****(2)** איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

$$y(1) = 4.593 \quad \text{(3)}$$

$$y(2) = 6.95328 \quad \text{(4)}$$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימונו: בתת-פרק זה נסמן $p = y'$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$\left(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1 \right) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$\left(\ln|y| - 2 \ln|x| - c_1 \right) \cdot \left(\ln|y| + 3 \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (2)$$

$$\left(y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6 \left(\frac{c}{y^2} \right)^2 y^2 + 3 \left(\frac{c}{y^2} \right) x - y = 0 \quad (6)$$